Devoir d'informatique

Serge Dupont (2004)

L'objectif de ce projet est une approche expérimentale des mathématiques. Il s'agit d'utiliser l'informatique pour découvrir (de manière dirigée) des propriétés mathématiques peut-être difficiles à déceler sans elle.

```
> restart:
```

1 Problème : La suite de Fibonacci

On rappelle que la suite de Fibonacci (de son vrai nom Léonard de Pise) est définie par récurrence par $Fib(n+2) = Fib(n+1) + Fib(n)$ et $Fib(0) = 0$, $Fib(1) = 1$.

1.1 Question 1 :

Définir une fonction **Fibgen(n,B,A)** qui calcule le n^e terme de l'unique suite u vérifiant $u(n+2) = u(n+1) + u(n)$ et $u(0) = B$, $u(1) = A$ pour tout entier *relatif* n.

Ecrire un programme **Fib1** qui calcule la valeur de $Fib(n)$ pour tout entier *relatif* n. Mettre dans une liste les termes lorsque n varie de -20 à 20. Que remarquez-vous ? En déduire un programme récursif **Fib** plus rapide pour calculer $Fib(n)$ pour n entier relatif.

1.2 Question 2 :

Comparer pour n entre -20 et 20 $Fib(n+1) * Fib(n-1)$ et $Fib(n)^2$. En déduire une identité algébrique (identité de Cassini).

1.3 Question 3 :

On cherche à écrire $Fib(n+k)$ en fonction de $Fib(n)$ et $Fib(n+1)$ (ce qui est évidement possible). Soient donc $a(n,k)$ et $b(n,k)$ tels que
$Fib(n+k) = a(n,k)Fib(n+1) + b(n,k)Fib(n)$. Quelques instants de reflexion suffisent pour s'apercevoir que a et b ne dépendent pas de n.

Ecrire un programme qui calcule les tableaux de tab_a et tab_b contenant les valeurs de $a(n,k)$ et $b(n,k)$ pour n variant entre -20 et 20. On donnera le nom de A à $Fib(n+1)$ et B à $Fib(n)$ et on cherchera les coefficients de A et B dans $Fib(n+k)$. (On pourra écrire un programme **koeff** qui renvoie la liste à deux termes contenant respectivement le coefficient de B et A.)

Que remarque-t-on ? En déduire un algorithme rapide de calcul de a et b. Vérifier votre conjecture pour n compris entre 1000 et 1010 et k compris entre -10 et 10.

1.4 Question 4 :

En déduire une formule donnant $Fib(kn)$ en fonction $Fib(n)$. Que dire de $Fib(kn)$ mod $Fib(n)$?

1.5 Question 5 :

Ecrire un programme **compteur0** qui compte le nombre de 0 dans un tableau à 1000 lignes et autant de colonnes. Construire le tableau **tabpgcd** contenant à la k^e ligne et n^e colonne le nombre $pgcd(Fib(n), Fib(k)) - Fib(pgcd(n, k))$ pour n et k variant de 10^3 à $2 * 10^3$. Que constatez-vous ? En déduire une nouvelle relation algébrique.

1.6 Question 6 :

Le théorème Zeckendorf affirme que tout entier naturel admet une unique représentation sous la forme

$$Fib(k_1) + Fib(k_2) + \cdots + Fib(k_r)$$

où $2 \leq k_1 < k_2 - 1$, $k_2 < k_3 - 1$,..., $k_{r-1} < k_r - 1$. Donner un algorithme **Zeckendorf** qui associe à l'entier n la liste $[k\_1, .., k\_r]$. Donner l'algorithme réciproque **deZecken**. (Utiliser la commande *add*.)

1.7 Question 7 :

Du système de représentation de Zeckendorf des entiers naturels précédents, on tire une nouvelle représentation des entiers naturels > 0 par des 0 et des 1 :

$$n = \sum_{k \geq 2} c_k Fib(k)$$

avec $c_k = 0$ ou 1 selon que $Fib(k)$ apparait ou non dans le développement de Zeckendorf de n. Bien sûr, seuls un nombre fini de $c - k$ sont non-nuls. La liste $[c_2, c_3, ..., c_p]$ où c_p est le dernier terme non-nul s'appelle (de manière impropre) le *développement en base de Fibonacci*, par analogie avec le développement en base deux. On écrira comme d'habitude la liste des chiffres de droite à gauche en partant de $Fib(2)$. Il est unique.
Ecrire un programme**testbaseFib** qui renvoie true si une liste de 0 et de 1 représente bien un entier en base de Fibonacci et false sinon. Ecrire un programme **convbaseFib** qui associe à l'entier naturel n son développement en base de Fibonacci, ainsi que sa réciproque **deconvbaseFib**.

1.8 Question 8 :

Déterminer expérimentalement pour quels k on a $Fib(k) \equiv 0 \mod Fib(n)$, $n \geq 2$ fixé. On pourra écrire une procédure ne gardant que les entiers pour lesquels on a la bonne congruence. Cette question est donc une réciproque de la question 4.

1.9 Question 9 :

On raffine la question précédente : pour quels entiers k a-t-on $Fib(k) \equiv 0 \mod Fib(n)^2$? Le résultat s'appelle le *lemme de Matjasevich*.

1.10 Question 10 :

Démontrer mathématiquement les conjectures des questions 1 à 9.