# Feuille d'exercices
# Calcul différentiel à une variable réelle

**Exercice** 1:

1. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ $n$ nombres réels. Soit $f$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots \frac{1}{x-a_n}$. Montrer que $f$ s'annule $n-1$-fois.
2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ scindé sur $\mathbf{R}$. Montrer que $P'$ est scindé.
3. Soit $f$ dérivable sur $\mathbf{R}$ tel que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

**Exercice** 2: Soit $P$ un polynôme à coefficients réels. Montrer que l'équation $e^x = P(x)$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

**Exercice** 3:

1. Montrer que $D^n(\arcsin)(x) \geq 0$ si $x \in ]0,1[$ et $n \in \mathbf{N}$. Calculer $D^n(\arcsin)(0)$. (On pourra commencer par déterminer une équation différentielle satisfaite par arcsin à coefficients polynomiaux puis utiliser la formule de Leibniz.)
2. Soit $a_n = \frac{1}{n!}\tan^{(n)}(0)$. Déterminer une formule de récurrence permettant de calculer $a_n$.

**Exercice** 4:

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$. Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable (on montrera que la dérivée d'ordre $n$ de $f$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$, où $P_n$ est un polynôme).
2. Quel est le développement de Taylor en 0 de la fonction $f$ ? En déduire qu'il existe des fonctions différentes avec le même développement de Taylor.

**Exercice** 5:

1. Montrer que pour tout $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $x\cos x < \sin x$.
2. En déduire que sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\sin x}{x}$ est décroissante et que $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$.
3. Montrer que pour tous les nombres $a$ et $b$ tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi a}{2b}$$

**Exercice** 6: Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \ln x$, montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

**Exercice** 7:

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.
2. Montrer que pour tout $x$, $e^x \geq 1 + x$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

**Exercice** 8: Soit $f(t) = \sqrt{1+t}$ définie sur $[0,+\infty[$. Etudier la convergence de la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$. Trouver un entier $N$ dépendant de $u_0$ tel que $|u_n - l| \leq 10^{-8}$, où $l$ est la limite de $(u_n)$. (Comment s'appelle $l$ ?)

**Exercice** 9: Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n^2})$.

**Exercice** 10:

1. Montrer l'encadrement
$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin 0,6 < \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{1}}{8}.$$
2. Montrer l'encadrement pour tout $x > 0$
$$0 < \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} < \frac{x^3}{16}.$$
3. Montrer que pour $t > 0$, on a l'inégalité :
$$\frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{8\sqrt{t+1}} \leq (t+1)^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{8\sqrt{t}}.$$
4. Montrer que pour $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{1\leq k\leq n} (1 + \frac{k}{n^2}).$$
5. Comment calculer une valeur approchée de $\ln 0,5$ à $10^{-6}$ près ?

**Exercice** 11:

1. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction sin en 0. En déduire l'inégalité : $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$
2. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 9 de la fonction sin en 0. Soit $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$. Montrer que pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, on a $P(x) \leq \sin x \leq P(x) + \frac{x^9}{9!}$.
3. Trouver un nombre $\alpha > 0$ tel que $|\sin x - P(x)| \leq 10^{-9}$ pour tout $x \in [0,\alpha]$.
4. Soit $P_k$ le développement de Taylor de la fonction sin en 0 à l'ordre $k$. Trouver un entier $k$ tel que pour tout $x$ tel que $0 \leq x \leq 1$, on ait $|\sin x - P_k(x)| \leq 10^{-8}$.

**Exercice** 12: Montrer que pour $t \neq 0$, $|t|$ assez petit, il existe un unique réel $c_t \in ]0,1[$ tel que $\sin t = t - \frac{t^3}{6}\cos t c_t$. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0} c_t = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

**Exercice** 13: Soit $a < x_0 < b$ trois réels et $f$ une fonction dérivable sur $]a,x_0[\cup]x_0,b[$.

1. On suppose que la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe. La fonction $f$ est-elle dérivable en $x_0$ ?
2. On suppose $f$ dérivable en $x_0$. A-t-on $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$ ?
3. On suppose $f$ continue en $x_0$ et que la limite $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe. La fonction $f$ est-elle dérivable en $x_0$ ?
4. On suppose $f$ dérivable et monotone sur $]a,b[$. Si $f'(x_0) = 0$, $f$ peut-elle être strictement monotone ?
5. On suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a-h,a+h[$ et $f'(a) \neq 0$. Existe-t-il toujours un intervalle non réduit à un point et contenant $a$ sur lequel $f$ est monotone ?