# Feuille d'exercices
# Calculs de primitives ; zéros de fonctions

## Calcul de primitives

**Exercice** 1: Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles de définition.

$$\frac{x^4}{x^2+1} \quad \frac{x+1}{x^2+x-20} \quad \frac{x^2-2x-1}{x^2-10x+29}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} \quad \cos^5 x \quad \sin 2x \sinh 3x$$

$$e^{3x}\sin 4x \quad (\cos x)\ln(1+\cos x) \quad \operatorname{arg\,sinh} x \quad \log(1+x^2)$$

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad \frac{1}{1+e^x} \quad \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \quad \frac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

$$\ln(\sqrt[3]{x}-1) \quad \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+2}} \quad (\arcsin x)^2$$

$$\frac{1}{\cos x+\sin x} \quad \frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x} \quad \frac{1}{\sqrt{|(b-x)(x-a)|}} \quad \frac{\sinh x}{1+\tanh x}.$$

**Exercice** 2: [Prolongement]

Soit $f : t \mapsto \frac{1}{2+\cos t}$ et $F$ sa primitive qui s'annule en 0. Déterminer $F(\pi)$ puis $F(x-2\pi)$ en fonction de $F(x)$. Déterminer enfin $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

**Exercice** 3:

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$. Déterminer une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-1}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$. Trouver une troisième méthode pour calculer $I_n$.
2. Pour $p, q \in \mathbf{N}$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^p t \sin^q t\,dt$. Calculer $I_{p,q}$. (On raisonnera par récurrence pour $p$ et $q$ pairs.)

## Calcul de zéros de fonctions

**Exercice** 4: Soit $P = X^3 + X + 1$. Déterminer une valeur approchée à $10^{-10}$ près de son unique racine réelle par la méthode d'itération puis par la méthode de Newton.

**Exercice** 5: Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(t) = t^3 - 4t + 1$.

1. Déterminer le nombre de zéros de $f$ et une valeur approchée à $10^{-1}$ près.
2. Soit $\phi(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$. Étudier si les zéros sont des points fixes attractifs ou répulsif de $\phi$. En déduire une valeur approchée des points fixes par itération.
3. Soit $r$ un zéro de $f$. Reprendre la question précédente à partir de l'équation $r = \pm\sqrt{4 - \frac{1}{x}}$.
4. Déterminer pour chaque racine une approximation suffisante pour pouvoir appliquer en toute sécurité la méthode de Newton. Pour chaque racine, déterminer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir une précision décimale à $10^{-20}$ près.