# Feuille d'exercices
# Polynômes à une indéterminée

Dans toute la suite, $\mathbf{K}$ désigne un corps commutatif.

**Exercice** 1:

1. Montrer que le reste dans la division euclidienne de $P$ par $X-a$ est $P(a)$.
2. Soient K un corps, $a$ et $b$ deux éléments distincts de K et $P$ un polynôme. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

**Exercice** 2: Soient $P$, $Q$, $U$ et $V$ quatre polynômes vérifiant $UP+QV=\mathrm{PGCD}(P,Q)$. Montrer que $U$ et $V$ sont premiers entre eux. Même question avec des entiers relatifs.

**Exercice** 3:

1. Calculer le PGCD des polynômes $X^{10}-1$ et $X^6-1$. Trouver tous les polynômes $U$ et $V$ tels que $U(X^{10}-1)+V(X^6-1)=\mathrm{PGCD}(X^{10}-1,X^6-1)$.
2. Résoudre les équations à coefficients polynômiaux :
$$U(X^{10}-1)+V(X^6-1)=X+1$$
$$U(X^{10}-1)+V(X^6-1)=X^3-X.$$
3. Calculer le PGCD des polynômes $A=X^4-3X^3+4X^2-6X+4$ et $B=X^4-2X^3-X^2-4X-6$.
4. Calculer le PGCD des polynômes $X^m-1$ et $X^n-1$, où $n$ et $m$ sont deux entiers naturels.
5. On n'a pas précisé le corps dans lequel on travaille. Pourquoi ?

**Exercice** 4: [Taylor]

Trouver tous les polynômes $P$ tels que $P(2)=1$, $P'(2)=2$, $P''(2)=4$ et pour tout $n\geq 3$, $P^{(n)}(2)=0$.

**Exercice** 5: [Calcul rusé du reste]

Soit $n\in\mathbf{N}$ et $\theta\in\mathbf{R}$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(\cos\theta+X\sin\theta)^n$ par $X^2+1$.
2. Trouver un polynôme à coefficients rationnels qui admet pour racine $1+\sqrt{2}$. En déduire la valeur en $1+\sqrt{2}$ du polynôme $2X^5-4X^4-2X^3+3X^2-5X-4$.

3. Montrer que le polynôme $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ est divisible par $X^2-X+1$.

**Exercice** 6: Trouver les racines complexes du polynôme $X^2-(3+4\mathrm{i})X-1+7\mathrm{i}$.

**Exercice** 7: Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$P(X)=X^3-2 \qquad S(X)=X^{2p}-1 \qquad T(X)=X^{2p+1}-1$$

**Exercice** 8: [Principe du prolongement algébrique]

1. Développer $D^n\left((1+X)^p(1+X)^q\right)$ de deux manières et calculer sa valeur en 0. En déduire la formule de convolution de Vandermonde.
2. Montrer, pour tous $r$, $s$ réels (ou complexes) et $n$ entier naturel, l'identité de convolution de Vandermonde :

$$\binom{r+s}{n}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}.$$

**Exercice** 9: On rappelle que si $x_0$ est racine multiple d'ordre $k\geq 1$ d'un polynôme $P$, $x_0$ est racine des polynômes $P'=P^{(1)}$, $P''=P^{(2)}$,..., $P^{(n)}$ pour $n\leq k-1$.

Trouver $a$, $b$ et $c$ tels que $-1$ soit racine d'ordre au moins trois du polynôme $X^5+2bX^4+(a+3b)X^3+7X^2+4cX+a$.

Quel est la multiplicité de la racine $-1$ ?

**Exercice** 10: Trouver tous les polynômes de $\mathbf{C}[X]$ tels que $P'$ divise $P$.

**Exercice** 11:

1. Ecrire la définition d'un polynôme irréductible.
2. Donner un exemple de polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbf{Q}$ mais pas sur $\mathbf{R}$.
3. Donner un exemple de polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbf{R}$ mais pas sur $\mathbf{C}$.
4. Montrer qu'un polynôme de degré impair de $\mathbf{R}[X]$ a toujours au moins une racine réelle. (Indication : on étudiera les limites en $\pm\infty$ de la fonction polynômiale associée.) Qu'en déduire pour les polynômes de degré impairs irréductibles sur $\mathbf{R}$ ?

**Exercice** 12: Soient $a_0,a_1,\ldots,a_n$ $n+1$ entiers relatifs premiers entre eux (c'est à dire que les seuls diviseurs communs à tous les $a_0,a_1,\ldots,a_n$ sont 1 et $-1$).

1. Montrer que si la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est racine du polynôme $a_nX^n+\ldots+a_0$, alors $p$ divise $a_0$ et $q$ divise $a_n$.
2. En déduire toutes les solutions rationnelles des équations

$$6x^4-11x^3-x^2-4=0$$

$$2x^3+12x^2+13x+15=0$$

**Exercice** 13:

1. Factoriser $X^4+X^2+1$ et $X^4-X^2+1$ en produit d'éléments unitaires et irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.
2. Montrer que $X^4-X^2+1$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.

**Exercice** 14: Soit $P$ le polynôme $X^4+X^3+X^2+3$ de $\mathbf{R}[X]$. Montrer que $P$ n'a pas de racine réelle. $P$ est-il irréductible sur $\mathbf{R}$ ?

**Exercice** 15: Soit $n$ un entier strictement positif. Trouver l'unique polynôme $Q_n$ de $\mathbf{Q}[X]$ vérifiant $Q_n - Q_n' = \frac{1}{n!}X^n$. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P$ de $\mathbf{Q}[X]$ vérifiant $P_n - P_n' = X^n$ et calculer ses coefficients.

**Exercice** 16: [Polynômes générateurs]

Soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes. On appelle *polynôme générateur* de la suite finie $(a_k)$ le polynôme $\sum_{k=1}^n a_k X^k$. Exprimer de manière aussi simple que possible les sommes ($z \in \mathbf{C}$) :

$$\sum_{k=0}^n kz^k \qquad \sum_{k=0}^n k^2 \qquad \sum_{k=0}^n k^2\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^n k^3\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^n k^2 3^k$$

**Exercice** 17: Soit $n$ un entier naturel.

1. Soit $A_0 = (1-X)^n$. On définit par récurrence une suite de polynômes $(A_k)$ par $A_{k+1} = XA_k'$. Montrer que pour tout entier naturel $k \leq n-1$, 1 est racine de $A_k$.
2. Montrer par récurrence sur $k$ que $A_n(1) = A_{n-k}^{(k)}(1)$. (On utilisera la formule de Leibniz.)
3. Soit $k$ un entier tel que $0 \leq k \leq n$. On considère le nombre réel

$$B_{n,k} = \sum_{j=0}^n (-1)^j j^k \tbinom{n}{j}.$$

Donner un expression simple de $B_{n,k}$. (Indication : dériver le polynôme générateur et établir une relation de récurrence.)