Planche d'exercices 6

Exercice 1: [Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$]

1. Exprimer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\mathrm{d}t$ en fonction de n. (On établira une formule de récurrence entre I_{n+2} et I_n.) En déduire un équivalent de I_n.
2. Montrer que pour tout entier n, on a
$$\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n\mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} (1+\frac{t^2}{n})^{-n}\mathrm{d}t.$$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 2: [Introduction à la topologie des espaces de dimension infinie]

On considère une suite de fonction $(f_n)_n$ définie sur $[0,1]$. Peut-on trouver $(f_n)_n$ telle que :

1. f_n continue et positive, $f_n(x)$ tend vers 0 pour tout x, mais $\int_0^1 f_n$ est une constante strictement positive (resp. tend vers $+\infty$) ?
2. $\int_0^1 f_n$ tend vers 0, mais $f_n(x)$ ne tend vers 0 pour aucun x.

Exercice 3: [Recherche d'équivalent (ENS Ulm)]

Trouver un équivalent de
$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k^k}.$$

1. Première méthode : comparaison avec une intégrale. Considérer $v_n = \ln u_n$ et en donner un équivalent en la comparant sur les intervalles $[k, k+1]$ à la fonction $t \mapsto t\ln t$.
2. Deuxième méthode : somme de Riemann. Faire apparaitre une somme de Riemann pour v_n et en déduire un équivalent. Pour augmenter la précision, on rappelera la démonstration de l'égalité pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f = \frac{1}{n}\int_0^1 f' + o(\frac{1}{n}).$$
Malheureusement, cette inégalité ne s'applique pas ici : il faut l'étendre pour f' monotone et telle que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f'$ existe.