Planche d'exercices 4

Exercice 1: [Partition de $\mathbf{N}^*$]

On note $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure du réel x, *i.e.* l'unique entier n tel que $n < x \leq n+1$.

Pour tout $\alpha > 0$, on définit

$$\mathrm{Spec}(\alpha) = \{E(k\alpha) \mid k \in \mathbf{N}^*\}.$$

Montrer que les ensembles $\mathrm{Spec}(\alpha)$ et $\mathrm{Spec}(\beta)$ forment une partition de $\mathbf{N}^*$ si et seulement si α et β sont irrationnels et

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

(Tuyau : Poser $N(\alpha, n) = \mathrm{Card}\{k \in \mathbf{N}^* \mid E(k\alpha) \leq n\}$ et vérifier que $N(\alpha, n) = \lceil \frac{n+1}{\alpha} \rceil - 1$.)

Exercice 2: [Exponentielle complexe]

Soit $z \in \mathbf{C}$. On pose $u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $\lim |u_n| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.
2. Soit $\theta_n = \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ avec $\theta_n \in]-\pi, \pi]$. Montrer que $\lim \theta_n = 0$ et que $\tan \theta_n \sim \frac{\mathrm{Im}(z)}{n}$.
3. Montrer que $\lim u_n = e^z$.

Exercice 3: [Nombres parfaits pairs]

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S(n)$ la somme des diviseurs dans $\mathbf{N}^*$ de n. Un nombre est parfait si $S(n) = 2n$.

1. Montrer que S est multiplicative, *i.e.* si m et n sont premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.
2. Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $2^p - 1$ est premier. Montrer que $2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait (théorème d'Euclide).
3. Soit n parfait et pair. Montrer que n s'écrit $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ où $(2^p - 1)$ est premier (théorème d'Euler).