Planche d'exercices 3

Exercice 1: [Sous-groupe fini de $GL(n,\mathbf{R})$ (École Centrale)]

Soit H une partie finie non-vide de $GL(n,\mathbf{R})$ stable par multiplication.

1. Soit $M \in H$. Montrer que la suite $k \mapsto M^k$ n'est pas injective. En déduire que H est un sous-groupe de $GL(n,\mathbf{R})$.
2. Soit $q = \operatorname{Card} H$ et $P = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} M$. Montrer que pour tout $M \in H$, $MP = PM = P$. En déduire que $P^2 = P$.
3. Trouver un supplémentaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de $\bigcap_{M\in H}\ker(M - I_n)$ stable par tous les éléments de H.

Exercice 2: [Déterminants de Vandermonde lacunaires (ENS Cachan)]

1. Soit P un polynôme ayant exactement k monômes non-nuls. Montrer le lemme de Descartes : P admet au plus $k-1$ racines strictement positives. Qu'en est-il des racines strictement négatives ? Et sur $\mathbf{R}$ tout entier ?
2. Soient maintenant k nombres réels strictement positifs $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ et k entiers naturels tels que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^{n_1} & \cdots & x_k^{n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n_k} & \cdots & x_k^{n_k} \end{vmatrix}$$

est strictement positif.