Feuille d'exercices
Matrices et déterminants II

Exercice 1: Soit $SL(n,\mathbf{Z})$ le sous-ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n à coefficients entiers et de déterminant 1.

1. Montrer que $SL(n,\mathbf{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.
2. Soit $A \in \mathcal{M}(n,\mathbf{Z})$. Montrer que A admet un inverse dans $\mathcal{M}(n,\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.
3. Soit $A \in SL(n,\mathbf{Z})$. Que dire du pgcd de chaque ligne ?
4. Montrer que tout élément de $SL(n,\mathbf{Z})$ est un produit de matrices élémentaires $I_n \pm E_{i,j}$, $i \neq j$. Les donner pour $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 2: [Matrices de permutations]

Soit n un entier positif. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{M}(n,\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n.

On définit l'application : $\left\{ \begin{array}{c} M : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathcal{M}(n,\mathbf{R}) \\ \sigma \longmapsto M_\sigma \end{array} \right.$ par $M_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

1. Ecrire les matrices M_σ lorsque σ appartient à $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$.
2. Montrer que l'application $\sigma \mapsto M_\sigma$ du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans le groupe $(\mathbf{R}^*, \cdot)$ est un homomorphisme injectif.
3. Montrer que la signature ε sur $\mathfrak{S}_n$ est égale à $\det \circ M$.

Exercice 3: Soient n un entier naturel. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \cdots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix}$$

où $P \in \mathbf{K}_{n-2}[X]$.

Exercice 4: [Polynôme caractéristique]

Soit $A \in \mathcal{M}(n,\mathbf{K})$.

1. Montrer que l'application de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}$ donnée par $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est une application polynomiale. Déterminer son degré d, son coefficient dominant, son coefficient constant et le coefficient du terme de degré $d-1$.
2. Déterminer le déterminant d'une matrice nilpotente N de $\mathcal{M}(n,\mathbf{K})$ où $\mathbf{K}$ sous-corps de $\mathbf{C}$. Calculer $\det(I_n + N)$. Soit $U \in \mathcal{M}(n,\mathbf{K})$ inversible telle que $UN = NU$. Montrer que $\det(U + N) = \det N$.

3. Calculer (sans calcul) les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Exercice 5: [Raisonnement par densité (de Zariski)]

Soit $\mathbf{K}$ est un corps infini.

1. Soit $A,B \in GL(n,\mathbf{K})$. Montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}A\,\mathrm{Com}B$.
2. Soient $A,B \in \mathcal{M}(n,\mathbf{K})$. En considérant $A-\lambda I_n$ et $B-\lambda I_n$, montrer que
$$\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}A\ \mathrm{Com}B.$$
(Regarder chaque coefficient.)
3. En déduire que si A et B sont semblables, $\mathrm{Com}A$ et $\mathrm{Com}B$ aussi.

Exercice 6: [Déterminant et trace]

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E. On note det le déterminant dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que pour toute famille de n vecteurs $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$,

$$\det(f(u_1),u_2,\dots,u_n) + \det(u_1,f(u_2),\dots,u_n) + \cdots + \det(u_1,u_2,\dots,f(u_n))$$
$$= \mathrm{Tr}(f)\det(u_1,u_2,\dots,u_n).$$

Exercice 7: Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Calculer $\det u$ dans chacun des cas suivants :

1. $E = \mathbf{K}_n[X]$ et $u = \Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
2. $E = \mathbf{K}_n[X]$ et $u = \tau : P \mapsto P(X+1)$.
3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u(M) = {}^tM$.
4. $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $u(X) = AX$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une matrice fixée. (Tuyau : regarder colonne par colonne.)

Exercice 8: [Résultant]

Soient F,G deux polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré respectifs n et m. On considère l'application

$$\left\{\begin{array}{llcl} \Phi : & \mathbf{C}_{m-1}[X] \times \mathbf{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_{n+m-1} \\ & (U,V) & \longmapsto & UF+VG \end{array}\right.$$

1. Montrer que Φ est bien définie et linéaire. Donner un condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'elle soit injective.
2. Donner la matrice de Φ dans les bases canoniques. (On l'appelle la matrice de Sylvester.) On appelle *résultant* de U et V le déterminant de cette matrice.
3. On appelle *discrimant* du polynôme P le résultant de P et P'. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que son discriminant soit nul. Déterminer le discrimant du polynôme général de degré deux et de degré trois. À quelle condition le polynôme $X^4 + aX + b$ admet-il une racine multiple ?