Feuille d'exercices

Matrices I

Exercice 1: Soit E un espace vectoriel. On désigne par E^{**} le bidual de E, *i.e.* $(E^*)^*$. Pour tout $x \in E$, on considère ϕ_x l'application de E^* dans $\mathbf{K}$ définie par $\phi_x(f) = f(x)$.

1. Montrer que $x \mapsto \phi_x$ est un isomorphisme de E dans E^{**}. (Noter que dans le cas où E est de dimension finie, l'isomorphisme entre E et E^{**} est canonique, *i.e.* ne dépend d'aucun choix de base, ce qui n'est pas le cas entre E et E^*.) En particulier, si $(f_j)_j$ est une base de E^*, sa base duale est canoniquement associée à une base de E, dite base *antéduale*.
2. Donner la base duale des bases suivantes de $\mathbf{C}_n[X]$: $((X-a)^k)_{0\leq k\leq n}$ et $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ où les L_j sont les polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $a_0,\dots,a_n \in \mathbf{C}$.
3. Soit $E = \mathbf{K}^3$. Pour $\overrightarrow{x} = (x,y,z)$, on pose $f_1(\overrightarrow{x}) = x+y-z$, $f_2(\overrightarrow{x}) = x-y+z$ et $f_3(\overrightarrow{x}) = x+y+z$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E^* et donner la base antéduale.
4. Soit $E = \mathbf{C}^n$. Soit $\overrightarrow{x} = (x_1,\dots,x_n)$. On pose $f_i(\overrightarrow{x}) = x_i + x_{i+1}$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $f_n(\overrightarrow{x}) = x_1 + x_n$. Déterminer si $(f_i)_i$ est une base de E^* et le cas échéant en donner la base antéduale.

Exercice 2: Soit E de dimension n et $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base.

1. Déterminer la matrice de l'application linéaire $\phi_{i,j} : e_k \mapsto \delta_{ik} e_j$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. En déduire une expression de $E_{ij}E_{pq}$.
3. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, *i.e.* les matrices Z vérifiant pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ $MZ = ZM$.
4. Montrer que les matrices triangulaires supérieures strictes forment une sous-algèbre[1] de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et déterminer son centre.

Exercice 3: Soit $f_a \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3)$ l'endomorphisme représenté, dans la base canonique, par

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. Discuter suivant le paramètre a du rang de f_a.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f_a$ et $\operatorname{Im} f_a$.

Exercice 4:

1. Soit $E = \mathbf{R}^3$. Ecrire les matrices dans la base canonique des endomorphismes suivants :
   (a) La projection sur le plan d'équation $x-2y+5z=0$ parallèlement au vecteur $(1,1,-1)$.
   (b) La symétrie par rapport à la droite engendrée par $(1,2,-1)$ parallèlement au plan d'équation $x+3y-z=0$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est un projecteur, dont on déterminera image et noyau. Donner la matrice de l'endomorphisme représenté par M dans une meilleure base.

[1] à un détail près : elle ne contient pas la matrice identité

3. Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -16 & -12 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que S est une symétrie dont on donnera les sous-espaces vectoriels caractéristiques. Donner S dans une meilleure base.

Exercice 5: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $A^n \in \mathrm{Vect}(A, A^2)$. Donner la matrice de A^n.

Exercice 6: Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^4. Montrer que A est inversible si et seulement si $x \neq 0$. Lorsque $x \neq 0$, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 7: Soit $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker} A$, $\mathrm{Im} A$ et calculer A^k pour $k \in \mathbf{N}$.

Exercice 8: Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle *trace* de A le scalaire $\mathrm{Tr} A = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{k,k}$.

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Montrer que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que pour toute matrice inversible P, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr} A$ et que deux matrices semblables ont même trace.
3. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A, B telles que $AB - BA = I_n$.
4. Soit f un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n. Montrer que la trace de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$. On note ce scalaire $\mathrm{Tr} f$.
5. Déterminer la trace d'un projecteur et d'une symétrie.
6. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Tr}$. (On pourra utiliser la base canonique.)

Exercice 9: Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{C})$ telle que $m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n+1$ et 0 sinon.

1. En considérant M comme une matrice de changement de base sur $\mathbf{C}_n[X]$, déterminer M^{-1}.
2. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. On définit par récurrence sur k
$$b_k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a_l.$$
Exprimer a_k en fonction des b_j.
3. En déduire le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ne laissant aucun élément fixe. (Introduire d_j le cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à j éléments ne laissant fixe aucun point, puis découper $\mathfrak{S}_n$ en parties A_k contenant les permutations à exactement k points fixes.)

Exercice 10: [Quaternions]

1. Montrer que $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ est un corps isomorphe à **C**.
2. Montrer que $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \overline{-b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C} \right\}$ est un corps non-commutatif.