Feuille d'exercices
Fonctions de deux variables - intégrales multiples

Exercice 1:

1. Calculer l'aire de l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
2. Calculer $\displaystyle\iint_D xydxdy$ pour $D=ABC$ où $A(0,0)$, $B(0,1))$ et $C(1,1)$.
3. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{x^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,0\leq y\leq x\leq 1\}$. Que pensez-vous de l'importance de l'ordre des intégrations ?
4. Calculer $\displaystyle\iint_D \ln(1+x+y)dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.
5. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,0\leq x-y\leq 3, -2\leq x+2y\leq 1\}$.
6. Calculer $\displaystyle\iint_D xydxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,r^2\leq x^2+y^2\leq R^2\}$ avec $0<r<R$.
7. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ où $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, x^2+y^2\leq 1\}$.

Exercice 2: [Calcul de $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$]

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx$.
2. Calculer $\displaystyle I_r=\iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ où $D_r=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq r^2\}$. Que dire de la fonction $r\mapsto I_r$?
3. En déduire $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$. (On pourra encadrer un carré par deux quarts de cercle.)

Exercice 3:

1. Calculer l'aire d'une cardioïde d'équation polaire $\rho=1+\cos\theta$.
2. Calculer l'aire d'une boucle de lemniscate d'équation $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ où $a>0$. (On cherchera d'abord un paramétrage et on tracera la courbe.)

3. Calculer l'aire d'une boucle de strophoïde d'équation polaire $\rho = 2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}$. On étudiera d'abord la courbe.

Exercice 4: [Centre de gravité]

1. Déterminer le centre de gravité du quart d'ellipse $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.
2. Déterminer le centre de gravité d'un secteur angulaire de rayon R et d'angle α.
3. Déterminer l'aire et le centre de gravité d'une arche de cycloïde, paramétrée par $t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

Exercice 5: [Preuve du théorème de Schwarz]

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que pour tous réels a, b, c, d tels que $a \leq b$, $c \leq d$, on a

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dxdy = 0.$$

En déduire le théorème de Schwarz.

Exercice 6: [Une jolie application]

1. Soit P le pavé $[a,b] \times [c,d]$. Montrer que P a un coté entier si et seulement si

$$\iint_R e^{i2\pi(x+y)} dxdy = 0.$$

2. Soit R un rectangle du plan subdivisé en un nombre fini de petits rectangles qui ont chacun un coté rationnel. Montrer que R a un coté rationnel. (Se ramener à des cotés entiers par homothétie puis utiliser l'additivité.)

Exercice 7: Soit V_n le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$. Déterminer une formule de récurrence pour V_n puis le calculer. Que dire de $\lim_{n\to\infty} V_n$? Est-ce attendu ?