

Feuille d'exercices

Groupes

Exercice 1:

1. Montrer que l'ensemble des bijections de l'ensemble X est un groupe.
2. Montrer que l'ensemble des bijections continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est un groupe.
3. Les bijections dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ forment-elles un groupe ?

Exercice 2:

1. Montrer que l'application $\exp : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^*$ est un homomorphisme de groupe. Quelle est son image et son noyau ?
2. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}^*$ définie par $x \longmapsto \frac{x}{|x|}$ est un homomorphisme de groupes. Quel sont son image et son noyau ?
3. Mêmes questions avec l'application $g : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ définie par $z \longmapsto \frac{z}{|z|}$.

Exercice 3: Soit G un groupe et g un élément de G . Soit ϕ_g l'application de G dans G définie par $h \longmapsto ghg^{-1}$. Montrer que ϕ_g est un homomorphisme de groupes. Si le groupe G est commutatif, que vaut ϕ_g ?

Exercice 4: Montrer que pour tout entier n , l'ensemble (noté $n\mathbf{Z}$) des entiers relatifs multiples de n est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$.

Réciproquement soit H un sous-groupe de $\mathbf{Z}$. Montrer que H admet un plus petit élément positif, que l'on appelle a . Montrer que H contient le groupe $a\mathbf{Z}$. Montrer que H est égal au groupe $a\mathbf{Z}$.

Exercice 5: (Cette question est difficile. Elle demande des connaissances sur les espaces vectoriels) Soit ϕ un homomorphisme du groupe $\mathbf{R}$ dans lui-même. Montrer qu'il s'agit d'une application linéaire du $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel $\mathbf{R}$ dans lui-même. Est-ce une application $\mathbf{R}$ -linéaire ?

Exercice 6: Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction $f_{a,b}$ de $\mathbf{R}$ dans lui-même définie par $x \longmapsto ax + b$. Montrer que l'ensemble des $f_{a,b}$ avec a non-nul est un groupe pour la composition des fonctions. Quel est l'élément neutre et quel est l'inverse de $f_{a,b}$? Ce groupe est-il commutatif ?