

Feuille d'exercices

Géométrie affine euclidienne du plan et de l'espace

Dans toute la suite, $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien et $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension trois, tous les deux éventuellement orientés si besoin est.

Exercice 1: Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces affines et $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ une application affine. Soit G le barycentre de la famille de points pondérés $((A_i, \lambda_i))_i$ dans $\mathbf{F}$. Montrer que le barycentre de la famille $(f(A_i), \lambda_i)_i$ est $f(G)$.

Exercice 2: Soit G un sous-groupe fini des déplacements du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On énumère les éléments de G :

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}.$$

1. Soit $O \in \mathcal{P}$. Montrer que le centre de gravité de la famille $(g_i(O))_{1 \leq i \leq n}$ est invariant par tous les éléments de G . On le note Ω .
2. Montrer que les éléments de G sont des rotations de centre Ω .
3. En considérant les angles dans $[0, 2\pi[$ des rotations de G , montrer que $G = \{r_{\frac{k2\pi}{n}} \mid 0 \leq k < n\}$ où r_θ est la rotation de centre Ω et d'angle θ .

Exercice 3:

1. Déterminer toutes les isométries d'un carré, d'un losange, d'un rectangle, d'un triangle équilatéral, d'un triangle rectangle, d'un triangle isocèle.
2. Déterminer toutes les isométries du cube dont les sommets sont les points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Reconnaître le groupe des isométries directes du cube.

Exercice 4: Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux plans affines dans $\mathcal{E}$. On suppose que $\vec{\mathcal{P}}_1^\perp \subset \vec{\mathcal{P}}_2$. Soit s_j la réflexion orthogonale par rapport à $\mathcal{P}_j$. Déterminer $s_1 \circ s_2$.

Exercice 5: Soient A, B, C trois points non-alignés dans $\mathcal{P}$. Soient p_A (respectivement p_B, p_C) la projection orthogonale sur la droite (BC) (respectivement (AC) et (AB)). Soit $f : (AB) \rightarrow (AB)$ définie par $f = p_C \circ p_B \circ p_A$.

1. Soit d une droite affine, dont on fixe O un point et $\vec{u}$ un vecteur directeur. L'abscisse d'un point $M \in d$ est alors l'unique réel x tel que $\vec{OM} = x\vec{u}$. Soit ϕ une application affine de d . Donner l'expression analytique de l'abscisse de $\phi(M)$ en fonction de x . En déduire la justification d'un point de vocabulaire qui remonte au collège.
2. Montrer que pour tous $P, Q \in (AB)$, $d(f(P), f(Q)) < d(P, Q)$.
3. Montrer qu'il existe un unique $U \in (AB)$ tel que $f(U) = U$. Dessiner alors les segments $[U, p_A(U)], [p_A(U), p_B p_A(U)], [p_B p_A(U), f(U)]$.

Exercice 6: Soient $A_1, \dots, A_n$ des points de $\mathcal{P}$ et G le centre de gravité. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\vec{\mathcal{P}}$.

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite orthogonale à $\vec{u}$ et O un point de $\mathcal{D}$. Montrer que

$$\sum_{1 \leq k \leq n} d(A_k, \mathcal{D})^2 = n \overrightarrow{OG} \cdot \vec{u} + \sum_{1 \leq k \leq n} (\overrightarrow{GA_k} \cdot \vec{u})^2.$$

2. En déduire que lorsque $\mathcal{D}$ parcourt l'ensemble des droites orthogonales à $\vec{u}$, $\sum_{1 \leq k \leq n} d(A_k, \mathcal{D})^2$ est minimal quand $G \in \mathcal{D}$.

Exercice 7: Déterminer la nature géométrique de l'application de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même donnée par

$$\begin{cases} x' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \end{cases}$$

Exercice 8: Soient r_1 et r_2 deux retournements de $\mathcal{E}$ d'axes respectifs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

- (a) Montrer que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes, $r_2 \circ r_1$ est une rotation.
(b) Montrer que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, $r_2 \circ r_1$ est une translation.
(c) Montrer que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas coplanaires, $r_2 \circ r_1$ est un vissage.
- Soit r une rotation différente de l'identité. Montrer que r est la composée de deux retournements d'axes d_1 et d_2 sécantes sur l'axe de r .
- Soit $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ non nul. Montrer que la translation t de vecteur $\vec{v}$ est la composée de deux retournements d'axes parallèles.
- Montrer que tout vissage est la composée de deux retournements.

Exercice 9: Soit f un antidéplacement du plan.

- Montrer que si f admet un point fixe, f est une réflexion.
- Montrer que si f n'admet pas de point fixe, $f = t \circ s$ où s est une réflexion affine d'axe d et t est une translation de vecteur $\vec{u} \in \vec{d}$. (f s'appelle une symétrie glissée ou glissement.) Montrer que t et s sont uniques et que $t \circ s = s \circ t$.

Exercice 10: On fixe un repère orthonormé direct du plan orienté $\mathcal{P}$ d'origine O .

- Soient A, B, C, D de coordonnées respectives $(0, 1), (0, 2), (1, 3), (1, 5)$. Déterminer le centre, le rapport et la mesure de l'angle de l'unique similitude qui envoie $[AB]$ sur $[CD]$, puis de celle qui envoie $[AC]$ sur $[BD]$.
- Soient A, B, C les points de coordonnées respectivement $(1, 0), (1, 1), (0, 1)$. Soient $L \in [OA], M \in [AB], N \in [CO]$ tels que le triangle LMN soit équilatéral. Montrer que le milieu de $[MN]$ a pour coordonnées $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Exercice 11: Soit f une application affine d'un espace affine euclidien. On suppose que pour tout point M , $\|\overrightarrow{Mf(M)}\|$ est constant. Montrer que f est une translation.

Exercice 12: Soit $\mathcal{F}$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ une fonction. On suppose que pour tous $A, B \in \mathcal{F}$, on a $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$. Soit $O \in \mathcal{F}$.

- On définit $\phi : \vec{\mathcal{F}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$ par $\phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$. Montrer que ϕ préserve le produit scalaire puis que ϕ est linéaire.
- En déduire que f est une isométrie affine.