Feuille d'exercices
Fonctions réelles

I Fonctions usuelles

Exercice 1: Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \arccos\cos x$.

Exercice 2: Simplifier $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} \quad \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \arctan \frac{1+x}{1-x}$.

Exercice 3: Simplifier $\arctan a + \arctan b - \arctan \frac{a+b}{1-ab}$ pour $ab \neq 1$:

1. en dérivant ;
2. en utilisant la trigonométrie.

Exercice 4: Montrer que $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$.

Exercice 5: Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq 1, \quad \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin x$, $\arcsin x - \arccos x = 2\arctan 2x - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6: Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \cosh(a+kb), \quad \sum_{k=0}^{n} \sinh(a+kb), \quad \sum_{k=0}^{n} k \cosh kb$.

Exercice 7: [fonctions hyperboliques réciproques]
Soit $\widetilde{\cosh} : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$.

1. Montrer que $\widetilde{\cosh}$ est bijective. On note $\arg\cosh$ la fonction réciproque. Exprimer $\arg\cosh$ en fonction de ln et $\sqrt{x^2-1}$. Calculer sa dérivée.
2. Soit $\arg\sinh$ la fonction réciproque de sinh. Exprimer $\arg\sinh$ en fonction de ln et $\sqrt{x^2+1}$.
3. Soit $x \in]-1,1[$. Exprimer $\arg\tanh x$ en fonction de ln.
4. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer $2\arctan\tanh x = \arctan\sinh 2x, \quad \arg\tanh\sin|x| = \arg\cosh \frac{1}{\cos x}$.

II Généralités sur les fonctions réelles

Exercice 8: Calculer les parties paires et impaires de $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ sur $]-1,1[$.

Exercice 9: Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{2}$. Montrer que f est périodique et trouver sa plus petite période.

Exercice 10: Soit I un intervalle borné.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tous réels x, y

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k-1}.$$

(On pourra introduire une suite géométrique.)

2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^n$ est lipschitzienne sur I.
3. En déduire qu'une fonction polynômiale est lipschitzienne sur tout intervalle borné.

Exercice 11: Déterminer les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui vérifient pour tous $x, y \in \mathbf{R}$

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|.$$

III Fonctions convexes

Exercice 12: Soient $a, b > 1$; Montrer que $\ln \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{\ln a \ln b}$.

Exercice 13: Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Exercice 14: Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, bornée et non-constante ; Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $f''(x)f''(y) < 0$.

Exercice 15: [Inégalités de Hölder et Minkowski]

Soient $p,q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $t \mapsto t^p$ est convexe. En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

où les a_k et les b_k sont des réels positifs.

2. Montrer que $t \mapsto (1 - t^{\frac{1}{p}})^p$ est convexe sur $[0,1]$. En déduire l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

où où les a_k et les b_k sont des réels positifs.

3. Montrer que pour tous $a, b > 0$

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

(Appliquer la fonction ln.) Cas d'égalité ?