Feuille d'exercices

Fonctions de deux variables - différentiabilité

Exercice 1: Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbf{R})$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) en fonction de $\partial_x f$ et $\partial_y f$ des fonctions

$$g_1(x,y) = f(y,x) \qquad g_2(x) = f(x,x) \qquad g_3(x,y) = f(y, f(x,x))$$

$$g_4(x) = f(x, f(x,x)) \qquad g_5(x,y) = f(x-y, x^2-y^3).$$

Exercice 2: Les fonctions suivantes sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad f_4(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = |xy|^\alpha \text{ où } \alpha > 0 \qquad f_6(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \text{ avec } \alpha, \beta > 0$$

Exercice 3: Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On pose

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ f'(x) \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue.
2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 4: Soit f une fonction d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit le laplacien de f par $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. On dit que f est harmonique si $\Delta f = 0$.

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Montrer que $(x,y) \mapsto \operatorname{Re} P(x+iy)$ est harmonique. Quels monômes $x^p y^q$ sont harmoniques ?

2. On suppose f harmonique de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que les fonctions suivantes le sont aussi :
$$\partial_x f \qquad x\partial_x f + y\partial_y f \qquad y\partial_x f - x\partial_y f.$$
3. Exprimer le laplacien en coordonnées polaires.
4. Soit $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$. Soit $r(x,y) = \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2$. Calculer Δr^n pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\Delta\frac{1}{r}$. Vérifier que $\ln r$ est harmonique.
5. On se place dans $\mathbf{R}^3$. Montrer que $\frac{1}{r}$ est harmonique.

Exercice 5: [Équations aux dérivées partielles]

1. Résoudre les équations aux dérivées partielles :
   (a) $\partial f/\partial x = 0$;
   (b) $\partial f/\partial x = h(x)$ où $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue ;
   (c) $\partial f/\partial x = h(y)$ où $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue ;
   (d) $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$;
   (e) $\partial^2 f/\partial x\partial y = 0$;
   (f) $\partial f/\partial x - 2\partial f/\partial y = 0$. (Utiliser un changement de variable linéaire.)
2. Résoudre l'équation des cordes vibrantes
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
   où $c > 0$ à l'aide d'un changement de variables $u = x+at$, $y = x+bt$.
3. Résoudre à l'aide des coordonnées polaires
$$x\partial_y f - y\partial_x f = 0 \qquad x\partial_x f + y\partial_y f = \sqrt{x^2+y^2}.$$
4. Déterminer f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ telle que g définie sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ par $(x,y) \mapsto f(\frac{y}{x})$ soit solution de
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

Exercice 6: [Extrema] Etudier les extrema des fonctions :

1. $(x,y) \mapsto e^{x\sin y}$.
2. $(x,y) \mapsto xe^y + ye^x$.
3. $(x,y) \mapsto (y-x)^3 + 6xy$ sur $\{(x,y) \mid -1 \le x \le y \le 1\}$.
4. $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+2xyz$ sur $\mathbf{R}^3$.
5. $\sin x = \sin y - \sin(x+y)$.
6. $xyz\ln x\ln y\ln z$ sur $(\mathbf{R}_+^*)^3$.

Exercice 7: [dérivée du déterminant]

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Soit $\phi = \det : E \to \mathbf{R}$. Calculer $\mathrm{d}\phi(I_2)$, puis $\mathrm{d}\phi(A)$ pour tout $A \in E$.