Feuille d'exercices
Fonctions de deux variables - continuité

Exercice 1: [Exemples à retenir]

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que les applications partielles sont continues.

2. En considérant $t \mapsto (t\alpha, t\beta)$, montrer que f n'est pas continue.

3. Soit g définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que pour tout vecteur $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, $\lim_{t\to(0,0)} g(t\alpha,t\beta) = 0$. g est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 2:

1. Étudier l'éventuelle limite en $(0,0)$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} \qquad \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{x^2y}{x^2+y^4} \qquad \frac{x-\sin x}{x^2+y^2}.$$

2. Soit

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1[^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{(1-x)^2(1-y)^2}{(1-xy)^3} \end{array}.$$

   Étudier le prolongement éventuel par continuité de f sur $[0,1]^2$.

3. Étudier le domaine de continuité de $g : (\mathbf{R}^+)^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{cases} y^x, & \text{si } y > 0\,; \\ 0, & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0\,; \\ 1, & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

4. Discuter en fonction du paramètre réel α de la continuité en $(0,0)$ de $\dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$.
5. Étudier l'éventuelle limite en $(0,0)$ de $\frac{x^3}{x^2+y^3}$ pour (x,y) dans l'ensemble de définition.

Exercice 3: [Recollements de fonctions continues]

1. Soient A_1 et A_2 deux parties de $\mathbf{R}^2$, $A = A_1 \cup A_2$ et $f : A \to \mathbf{R}$ une fonction. Soit $a \in A_1 \cap A_2$. On suppose $f_{|A_1}$ et $f_{|A_2}$ continues en a. Montrer que f est continue en a.
2. Étudier la continuité de

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \text{si } |x| < |y|\,; \\ y, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4: [En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes]

Soit A une partie de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction de A dans $\mathbf{R}$. On dit qu'un partie B est *fermée* si toute suite (b_n) convergente dans $\mathbf{R}^2$ a sa limite dans B. On suppose A fermée et bornée.

1. Établir le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée dans $\mathbf{R}^2$ admet une sous-suite convergente.
2. Soit $a \in A$. Montrer que f est continue en a pour une norme N si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A convergente vers a, on a $\lim f(a_n) = f(a)$.
3. Montrer que f est bornée. (Raisonner par l'absurde et utiliser Bolzano-Weierstrass). Montrer que la borne supérieure M de f est atteinte en considérant $g(a) = \frac{1}{M-f(a)}$. Que dire de la borne inférieure ?
4. Soit N une norme sur $\mathbf{R}^2$.
   (a) En introduisant une base de $\mathbf{R}^2$, montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, $N(u) \leq C_1 \|u\|_\infty$.
   (b) Montrer que N est C_1-lipschitzienne donc continue (pour la norme $\|.\|_\infty$).
   (c) Soit $S = \{u \in \mathbf{R}^2 \,|\, \|u\|_\infty = 1\}$. Montrer que S est fermé et bornée (pour la norme $\|.\|_\infty$). Soit $C_2 = \inf N_{|S}$. Montrer que $C_2 > 0$. En déduire que pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, $\|u\|_\infty \leq C_2 N(u)$.
   (d) En déduire que toutes les normes sur $\mathbf{R}^2$ sont équivalentes.
5. *[Complément]* Montrer qu'une partie B est fermée si et seulement si son complémentaire est ouvert.

Exercice 5: [Caractérisation de la continuité]

Soit f une application entr deux espaces normés. Montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.