Feuille d'exercices
Algèbre linéaire en dimension finie II

Exercice 1: Montrer que toute application linéaire de $\mathbf{K}^2$ dans lui-même est de la forme $(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$ où $a,b,c,d \in \mathbf{K}^2$.

Exercice 2: Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Déterminer la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

Exercice 3: [suites linéaires récurrentes]

1. Pour chacune des relations récurrentes suivantes, exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n (dans le corps des coefficients) :
$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n \quad u_{n+2} = 2iu_{n+1} + u_n.$$
2. Discuter dans chaque cas l'existence de solutions bornées.
3. Discuter en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$ la dimension de l'espace vectoriel des suites bornées vérifiant
$$u_{n+2} = u_{n+1} + \alpha u_n.$$

Exercice 4: Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, x et $u(x)$ sont colinéaires. Montrer que u est une homothétie. En déduire qu'un endomorphisme qui commute à tous les endomorphismes de E est une homothétie.

Exercice 5: Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose $u^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} u \leq \frac{n}{2}$.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = E$. Montrer que les deux sommes sont directes.
3. Montrer que si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$, alors n est pair. Réciproquement, si n est pair, montrer qu'il existe un endomorphisme u tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.

Exercice 6: Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de dimension p. Montrer qu'il existe $n-p$ formes linéaires $(\varphi_i)_i$ telles que
$$F = \bigcap_{1 \leq i \leq n-p} \operatorname{Ker} \varphi_i.$$
Montrer que les φ_i sont linéairement indépendantes.

Exercice 7: Soit u et v deux formes linéaires sur E. On suppose que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v$. Montrer que $u = v$.