Feuille d'exercices
Espaces euclidiens

E est un espace euclidien.

Exercice 1: [Cauchy-Schwarz]
Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels. Montrer l'inégalité

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Exercice 2: [Orthogonalité]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 3: [Projections orthogonales]
Soit $E = \mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.

1. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur l'hyperplan H d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Calculer la distance entre le vecteur $(1,2,3,4)$ et H.
2. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à H.
3. Donner la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace d'équations $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Exercice 4: Soit $E = \mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On considère les vecteurs $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (-2,0,1,1)$, $u_3 = (0,1,0,1)$. Soit $H = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Montrer que H est un hyperplan et en donner un équation.
2. Donner un vecteur normal unitaire à H.
3. Donner les matrices dans la base canonique des projections et symétries orthogonales par rapport à H.

Exercice 5: Soit p une projection de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que p est orthogonale si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 6: [Det]
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormé fixée de référence. Montrer que pour toute base orthonormée $\mathcal{B}'$, $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \pm 1$. Celles qui vérifient $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$ sont dite directes et les autres

indirectes. On note Det le déterminant dans une base orthonormée directe. (Ceci dépend donc d'un choix.)

Exercice 7: [Matrices de Gram]

Soit $(x_1,...x_n)$ une famille de n vecteurs de E et F le sous-espace qu'ils engendrent. On appelle *matrice de Gram* de la famille $(x_1,...,x_n)$ la matrice $G(x_1,...,x_n) = (\langle x_i \mid x_j\rangle)_{1\le i,j\le n}$.

1. Montrer que la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée si et seulement si $\det G(x_1,...,x_n) = 0$. (Utiliser une combinaison linéaire des colonnes.)
2. Montrer que
$$\det G(x_1,...,x_n) = \mathrm{Det}(x_1,...,x_n)^2.$$
(On pourra introduire la matrice de la famille $(x_1,...,x_n)$ dans une base orthonormée.) On retrouve en particulier le résultat précédent.
3. Soit $x \in E$. Montrer que
$$\mathrm{d}(x,F)^2 = \frac{\det G(x,x_1,...,x_n)}{\det G(x_1,...,x_n)}.$$

Exercice 8: [Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$]

On considère l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que cette application est un produit scalaire, pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $|\mathrm{Tr} A| \le \sqrt{n}\|A\|$.
3. Quel est l'orthogonal de l'espace des matrices symétriques ?

Exercice 9: [Inégalité d'Hadamard]

Soit $n = \dim E$ et $(x_1,...,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Montrer que
$$|\mathrm{Det}(x_1,...,x_n)| \le \|x_1\|\cdots\|x_n\|.$$
(Indication : orthonormaliser $(x_1,...,x_n)$ en $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ par Schmidt et remarquer une propriété de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_n)$; déterminer en particulier les coefficients diagonaux.)

Exercice 10: Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $|\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{i,j}| \le n$. Cas d'égalité ?

Exercice 11:

1. Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et donner une base orthonormée de E. En déduire le minimum de la fonction de deux variables réelles $(a,b) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$ définie sur $\mathbf{R}^2$.
2. Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\sum_{i=0}^3 P(i)Q(i)$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et donner une base orthonormée de E.

3. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ muni du produit scalaire qui rend la base canonique orthonormée. On considère la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange pour la famille $(x_0, \ldots, x_n)$. Quel est le volume du parallèlépipède qu'ils forment ? (Utiliser une matrice de passage.)