Feuille d'exercices

Équation différentielles linéaires

Exercice 1: Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$ de deux manières.

Exercice 2: [variation de la constante]

On se propose de donner la méthode de variation de la constante [1] pour une équation du second ordre $y'' + ay' + by = f(t)$ où a, b sont des constantes réelles ou complexes et f une fonction continue.

L'idée est de partir des deux solutions non-colinéaires y_1 et y_2 de l'équation homogène et de chercher une solution de la forme $c_1 y_1 + c_2 y_2$. On impose de plus la condition $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$.

1. Résoudre $y'' - 2y' + y = e^t \cos t$ par cette méthode.
2. Soient (E) l'équation $y'' + ay' + by = f(t)$. Montrer que (E) admet une solution. Ceci démontre la partie admise dans le cours sur l'existence des solutions d'une équation du second ordre. Montrer ensuite que pour tout $t_0 \in \mathbf{R}$ et tous y_0, y_1, il existe une unique solution g_0 de (E) vérifiant $g_0(t_0) = y_0$ et $g_0'(t_0) = y_1$.
3. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a^2 < 4b$. On suppose f continue sur $\mathbf{R}$. Montrer en utilisant la variation de la constante que (E) admet pour solution particulière
$$t \mapsto \frac{1}{\beta} \int_0^t e^{\alpha(t-u)} \sin \beta(t-u)\ f(u)\ du$$
où $\alpha = -a$ et $\beta = \sqrt{4b - a^2}$. Remarquer que cette formule est valable pour toute fonction f.

Exercice 3: Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Résoudre sur $\mathbf{R}$
$$y''(t) - (1+\alpha) y'(t) + \alpha y(t) = e^{(1+\alpha)t}.$$

Exercice 4: Soit $I =]0, +\infty[$. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \int_0^x f(t) dt$ et en déduire que l'équation $xy' + y = f(x)$ admet une unique solution sur I prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5: [géométrie différentielle]

Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I de courbe représentative $\mathcal{C}$. On suppose que pour tout $M \in \mathcal{C}$, la tangente à $\mathcal{C}$ en M coupe les deux axes de coordonnées, et que M est au milieu de ces deux points. Caractériser f et déterminer I aussi grand que possible.

Exercice 6: [où l'on applique la maxime d'Hadamard]

Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Résoudre $z' = \alpha z$. En déduire les solutions du système différentiel réel :
$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + y(t) \end{cases}$$

[1] On devrait dire *des constantes* car il y en a deux.