Feuille d'exercices
Ensembles finis et combinatoire

Exercice 1: Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$ trois applications telles que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ soient surjectives et $h \circ g \circ f$ injective. Montrer que f, g, h sont bijectives.

Exercice 2: Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. Montrer que f n'est pas surjective. (Indication : considérer l'ensemble $\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.)

Exercice 3: [Convolution de Vandermonde]
Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E. On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array}.$$

1. A quelles conditions sur A et B a-t-on f surjective ? f injective ?
2. Lorsque f est bijective, déterminer f^{-1}.
3. En déduire la formule de convolution de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 4: [Bijections entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^2$]

1. Montrer que l'application de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}^*$ donnée par $(p,q) \mapsto 2^p(2q+1)$ est une bijection. Ecrire un programme MAPLE qui à tout entier $n \geq 1$ associe son unique antécédent par cette application.
2. Montrer que l'application de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ donnée par $(n,k) \mapsto \frac{1}{2}(n+k)(n+k+1)+k$ est une bijection. (Faire un dessin.)

Exercice 5: Simplifier les sommes suivantes (n, p entiers) :

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}, k \text{ pair}} \binom{n}{k} \qquad \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad \sum_{k \in \mathbf{Z}, k \text{ pair}} (-3)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} k \binom{n}{k} \qquad \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k k \binom{n}{k} \qquad \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$

Exercice 6: Soit $a \geq 1$ un entier et $z = e^{i\frac{2\pi}{a}}$. On pose $u_p = (1+z^p)^n$ pour $0 \leq p \leq a-1$ et $S_q = \sum_k \binom{n}{ak+q}$ pour $0 \leq q \leq a-1$. Exprimer u_p en fonction des S_q. En déduire S_q en fonction des u_p. (On pourra commencer par $a=2$ et $a=3$.)

Exercice 7: [Polynômes générateurs]

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombre complexes. On appelle *polynôme générateur* de la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. A l'aide de polynômes générateurs, simplifier

$$\sum_{0\leq k\leq n} kk! \qquad \sum_{0\leq k\leq n} k^2 \binom{n}{k} \qquad \sum_{0\leq k\leq n} k^3 \binom{n}{k} \qquad \sum_{0\leq k\leq n} k(k+1)$$

Exercice 8: [Petit théorème de Fermat]

1. Montrer que si p est premier, il divise $\binom{p}{k}$ pour tout $1 \leq k \leq p-1$.
2. En déduire par récurrence que pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $x^p \equiv x \mod p$. En déduire que si p ne divise pas x, $x^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exercice 9: [Manipulation de $\sum$]

1. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{1}{k-j}$. En déduire $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq n} H_j$ en fonction de H_n.
2. Soient $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ des nombres réels. Soient

$$S = \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j), \quad s_1 = \sum_{1\leq k\leq n} a_k, \quad s_2 = \sum_{1\leq k\leq n} b_k, \quad s_3 = \sum_{1\leq k\leq n} a_k b_k.$$

Exprimer S en fonction de s_1, s_2, s_3. En déduire les inégalités de Tchebitchev :

$$\text{si } a_1 \leq \cdots \leq a_n \text{ et } b_1 \leq \cdots \leq b_n, \quad \left(\sum_{1\leq k\leq n} a_k\right)\left(\sum_{1\leq k\leq n} b_k\right) \leq n \sum_{1\leq k\leq n} a_k b_k$$

$$\text{si } a_1 \leq \cdots \leq a_n \text{ et } b_1 \geq \cdots \geq b_n, \quad \left(\sum_{1\leq k\leq n} a_k\right)\left(\sum_{1\leq k\leq n} b_k\right) \geq n \sum_{1\leq k\leq n} a_k b_k.$$