Devoir en temps libre n^o 13

La règle de Descartes

À rendre le lundi 17 janvier

Ce sujet, issu d'un devoir commun, est un petit peu long, mais très instructif.
Les trois parties du problème sont essentiellement indépendantes.

Exercice 1: Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe et décroissante.
2. Montrer que f admet une limite finie l en $+\infty$ et que $l = 0$.
3. Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$ et que cette limite est nulle.
4. Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$
$$f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}.$$
(On considérera $t \mapsto f(t)e^{\alpha t}$.)

Exercice 2: Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I telle que $\varphi(0) = 0$. On considère pour $t \in I \setminus \{0\}$ la fonction $f(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On désigne encore par f la fonction ainsi prolongée.
2. Exprimer la dérivée n^e de f en $t \neq 0$ grâce à la formule de Leibniz.
3. Exprimer $f(0)$ en fonction des $f^{(k)}(t)$ grâce à la formule de Taylor.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Problème

Partie 1 - Localisation des racines positives d'un polynôme

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, que l'on écrit sous la forme
$$P = a_0 + a_1 X^{b_1} + \cdots + a_n X^{b_n}$$
avec
$$0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n$$
et $a_k \neq 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$.
On désigne par Z l'ensemble des racines de P.
Soit $V(P)$ le nombre de changements de signes parmi les coefficients de P, *i.e.*
$$V(P) = \text{card}\{0 \leq k \leq n \mid a_k a_{k+1} < 0\}.$$

On désigne par $n_+(P)$ le nombre de racines de P strictement positives comptées avec multiplicités. Autrement dit, si m_r est la multiplicité de la racine r alors

$$n_+(P) = \sum_{r \in Z \text{ et } r>0} m_r.$$

On cherche à montrer le résultat suivant :

Règle de Descartes *Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant pas 0 pour racine, alors $n_+(P) \leq V(P)$, avec égalité si toutes les racines de P sont réelles.*

1. Montrer le théorème si $n = 0$ et $n = 1$.
2. Montrer que X^{b_1-1} divise P'.

   Dans toute la suite de cette partie, on note Q le quotient de la division de P' par X^{b_1-1} et
   $$r_1 < \cdots < r_l$$
   les racines strictement positives de P.

   On suppose également le théorème vrai pour $n-1$ avec $n \geq 1$.
3. Montrer que
   $$n_+(Q) \geq n_+(P) - 1$$
4. Montrer que $n_+(P) \leq V(P)$ si $a_0 a_1 < 0$.
5. On suppose dans cette question $a_0 a_1 > 0$.
   (a) Montrer que si $a_0 > 0$, P est croissante au voisinage de 0 à droite.
   (b) Montrer que si $a_0 < 0$, $-P$ est croissante au voisinage de 0 à droite.
   (c) En déduire que Q admet une racine dans l'intervalle $]0, r_1[$.
   (d) Montrer que $n_+(P) \leq V(P)$.
6. Soit $P^- = P(-X)$ et $c_k = (-1)^{b_k} a_k$.
   (a) Montrer que $c_k c_{k+1} = (-1)^{b_{k+1}-b_k} a_k a_{k+1}$.
   (b) Montrer que si $c_k c_{k+1} < 0$ et si $a_k a_{k+1} < 0$, alors $b_{k+1} - b_k \geq 2$.
   (c) On désigne par $V(P, P^-)$ le nombre d'indice k tels que $c_k c_{k+1} < 0$ et $a_k a_{k+1} < 0$. Montrer que
   $$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \geq$$
   $$(V(P) - V(P, P^-)) + (V(P^-) - V(P, P^-)) + 2V(P, P^-).$$
   (On découpera l'intervalle d'entiers $[0, n-1]$ en trois parties selon que $a_k a_{k+1} < 0$, $c_k c_{k+1} < 0$ ou les deux.)
   (d) En déduire que si P a toutes ses racines réelles, $n_+(P) = V(P)$.

Partie 2 - Localisation des racines d'un polynôme

On considère dans cette partie un polynôme P à coefficients complexes, *unitaire*, de degré $n > 0$ et de coefficient constant a_0 non-nul.

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

On définit aussi

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 1+\max_{0\leq k<n} \mid a_k \mid \\ \gamma_2 &= \max(1, \sum_{0\leq k<n} \mid a_k \mid).\end{aligned}$$

On suppose dans les quatre premières questions de cette partie que P est à coefficients réels avec

$$a_0 < 0, a_1 \leq 0, \cdots, a_{n-1} \leq 0$$

1. Montrer que P admet une unique racine strictement positive. (On pourra considérer $\frac{P(x)}{x^n}$.) On la note ρ.
2. Montrer que pour tout nombre complexe z, $|P(z)| \geq P(|z|)$.
3. Montrer que $\rho \leq \gamma_1$ et $\rho \leq \gamma_2$.
4. Montrer que pour pour toute racine r de P, on a $\mid r \mid \leq \min(\gamma_1, \gamma_2)$.
5. On retourne au cas général.
   Montrer que toute racine r de P vérifie $\mid r \mid \leq \min(\gamma_1, \gamma_2)$.
   (On considérera $Q = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \mid a_k \mid X^k$.)

Partie 3 - Isolement des zéros d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et sa dérivée f' n'ont pas de zéros communs. On note Z l'ensemble des zéros de f.

1. Soit $a < b$ deux réels dans I et $c = \frac{a+b}{2}$.
   (a) Montrer que si f admet un zéro dans $[a,b]$, alors
   $$|f(c)| \leq \frac{b-a}{2} \sup_{a\leq t\leq b} |f'(t)|$$
   (b) Montrer que si f admet deux zéros dans $[a,b]$, alors
   $$|f'(c)| \leq \frac{b-a}{2} \sup_{a\leq t\leq b} |f''(t)|$$
2. (a) Montrer que les zéros de f sont isolés, *i.e.* pour tout zéro r de f, il existe un $\varepsilon_r > 0$ tel que que r soit le seul zéro de f dans $[r-\varepsilon_r, r+\varepsilon_r]$. En déduire que l'intersection de Z avec tout intervalle borné est fini.
   (b) Montrer que pour tout segment J inclus dans I, il existe une subdivision $(c_k)_{0\leq k\leq p}$ de J à pas constant telle que f restreinte à $[c_k, c_{k+1}]$ a au plus un zéro.
   (c) Donner un exemple de fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle borné qui admet un nombre infini de zéros, mais n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle non-réduit à un point.
3. On suppose désormais que I est un segment.

(a) Prouver l'existence de $m_1 = \min_{r\in Z} |f'(r)|$ et de $M_2 = \sup_{t\in I} |f''(t)|$. Montrer que $m_1 > 0$ et que pour tout $t \in I$ et tout $r \in Z$:

$$M_2|t-r| \leq \frac{m_1}{2} \Longrightarrow |f'(t)| \geq \frac{m_1}{2}$$

(b) Soient α et β des majorants respectifs de $|f'|$ et $|f''|$ sur I. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que pour tout $t \in [a,b]$, on ait l'une ou l'autre des inégalités suivantes :

$$|f(t)| > \alpha\frac{b-a}{2^n}$$
$$|f'(t)| > \beta\frac{b-a}{2^n}$$

(c) Écrire un algorithme qui sépare les zéros de f. (On suppose α et β connus.)