Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 11

Grand théorème de Fermat pour les polynômes

À rendre le lundi 12 décembre

Indication particulière : vu la longueur du devoir, il est *strictement interdit* de rendre plus d'une copie double. Les contrevenants encourent la peine maximale. Qu'on se le dise !

Soit P un polynôme non-nul de $\mathbf{C}[T]$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des racines complexes de P (comptées sans multiplicités). On définit le *radical* de P comme $\operatorname{rad} P = 1$ si $\deg P = 0$ et $\operatorname{rad} P = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (T - \alpha)$ sinon. Soit $r(P)$ le nombre de racines distinctes complexes de P. On considère trois polynômes non-nuls P, Q, R de $\mathbf{C}[T]$.

1. Montrer que $r(P) = \deg \operatorname{rad} P$ et $r(PQR) \leq \deg P + \deg Q + \deg R$.
2. On cherche à montrer le théorème de Mason : Si P, Q, R sont trois polynômes premiers entre eux dans leur ensemble dans $\mathbf{C}[T]$ et non-constants tels que $P + Q + R = 0$ alors
$$\max(\deg P, \deg Q, \deg R) \leq r(PQR) - 1.$$
On suppose dans cette question que P, Q, R sont comme dans l'énoncé du théorème.
   (a) Montrer que P, Q, R peuvent s'écrire
$$P = \lambda \prod_{1 \leq i \leq p} (T - \alpha_i)^{l_i} \quad Q = \mu \prod_{1 \leq i \leq q} (T - \beta_i)^{m_i} \quad R = \nu \prod_{1 \leq i \leq r} (T - \gamma_i)^{n_i}$$
où les α_i (resp. les β_i, les γ_i) sont distincts deux à deux. Exprimer p en fonction de $r(P)$. Qu'est-ce que l'entier l_i par rapport à α_i ?
   (b) Soit $\Delta = PQ' - P'Q$. Montrer que Δ est non-nul et que $\Delta = R'Q - RQ' = P'R - PR'$.
   (c) Montrer que $\prod_{1 \leq i \leq p} (T - \alpha_i)^{l_i - 1}$ divise Δ.
   (d) Montrer que $(\deg P - p) + (\deg Q - q) + (\deg R - r) \leq \deg P + \deg Q - 1$.
   (e) En déduire que $\deg R \leq r(PQR) - 1$, puis le théorème de Mason.
3. En déduire le théorème de Liouville (Fermat pour les polynômes) : pour tout entier $n \geq 3$, l'équation
$$X^n + Y^n = Z^n$$
n'admet aucune solution dans $\mathbf{C}[T]$ avec X, Y, Z non-constants et premiers entre eux.