Devoir en temps libre n° 10

Nombres congruents et grand théorème de Fermat

À rendre le lundi 5 décembre

Partie 1 - Préliminaires

Soient u et v deux entiers naturels premiers entre eux.

1. Montrer que si uv est un carré, u et v aussi.
2. Montrer que le *PGCD* de $u+v$ et $u-v$ est 1 ou 2.

Partie 2 - Triplets pythagoriciens

Un triplet $(a,b,c) \in (\mathbf{N} \setminus \{0\})^3$ est un triplet *pythagoricien* si $a^2+b^2=c^2$.

1. Soit (a_0,b_0,c_0) un triplet pythagoricien. Montrer qu'il existe un entier positif k et trois entiers a,b,c tels que $a_0 = ka$, $b_0 = kb$ et $c_0 = kc$ avec $\operatorname{pgcd}(a,b,c) = 1$. Montrer que a,b,c sont premiers entre eux deux à deux.
2. Soient les ensembles
$$A = \{(a,b,c) \in (\mathbf{N} \setminus \{0\})^3 \mid a^2+b^2=c^2 \text{ et } \operatorname{pgcd}(a,b,c)=1\}$$
$$B = \{(r_1,r_2) \in (\mathbf{Q}^+ \setminus \{0\})^2 \mid r_1^2+r_2^2=1\}.$$
Montrer que l'application $\phi : A \to B$ définie par $(a,b,c) \mapsto \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ est une bijection.
3. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Donner son équation cartésienne. Calculer l'intersection de $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{(-1,0)\}$ et de la droite d'équation $y = t(x+1)$. (Faire un dessin.) On note $(x(t), y(t))$ cette intersection. Donner le sous-ensemble I de $\mathbf{R}$ sur lequel $x(t)$ et $y(t)$ sont strictement positifs.
4. Soit $t \in I$. Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ sont rationnels si et seulement si t est rationnel.
5. [paramétrage des triplets pythagoriciens] En déduire que tous les triplets pythagoriciens s'écrivent de manière unique (quitte à permuter a et b) sous la forme
$$a = d(u^2-v^2) \qquad b = 2duv \qquad c = d(u^2+v^2)$$
avec d,u,v entiers naturels non-nuls, $u > v$, u et v premiers entre eux non tous les deux impairs. (Remarque : on pouvait démontrer ce résultat de manière purement arithmétique.)

Partie 3 - Grand théorème de Fermat pour $n = 4$

On s'intéresse à l'équation diophantienne

$$x^4 - y^4 = z^2 \tag{1}$$

que l'on cherche à résoudre dans $\mathbf{N}$. On suppose que (x,y,z) est une solution avec $x,y,z > 0$.

1. Montrer qu'il existe un triplet (x_0,y_0,z_0) solution de (1) avec $\mathrm{pgcd}(x_0,y_0,z_0) = 1$. Montrer que x_0, y_0, z_0 sont premiers entre eux deux à deux.
2. Montrer que x_0 est impair. (Indication : regarder suivant la parité de y_0. Si y_0 est impair, regarder modulo 4.)
3. On suppose dans cette question y_0 impair. En paramétrant le triplet pythagoricien (z_0, y_0^2, x_0^2) et en calculant $x_0^2 y_0^2$, montrer que l'équation (1) admet un triplet solution (x_1,y_1,z_1) avec $x_1 < x_0$.
4. On suppose dans cette question que y_0 est pair. Montrer qu'il existe un paramétrage du triplet pythagoricien (z_0, y_0^2, x_0^2) par u et v entiers premiers entre eux et v pair, tels que u et $v/2$ sont des carrés. (Considérer $(y_0/2)^2$.) En déduire qu'il existe α et β entiers tels que $x_0^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$. Montrer qu'il existe p et q entiers tels que $\alpha^2 = p^4 - q^4$. En déduire que l'équation (1) admet un triplet solution (x_1,y_1,z_1) avec $x_1 < x_0$.
5. En déduire que l'équation (1) n'admet aucune solution (x,y,z) telle que $xyz \neq 0$.
6. En déduire le «grand théorème de Fermat» pour $n = 4$:

   Grand théorème de Fermat *L'équation $x^4 + y^4 = z^4$ n'admet aucun triplet d'entiers (x,y,z) solution tel que $xyz \neq 0$.*
7. Montrer que l'aire d'un triangle rectangle à cotés rationnels non-nuls n'est pas un carré dans $\mathbf{Q}$. (Se ramener à des cotés entiers premiers entre eux, puis paramétrer un triplet pythagoricien par u et v, puis montrer que u et v sont des carrés, pour enfin obtenir une contradiction.)

Partie 4 - Nombres congruents

Cette partie nécessite l'utilisation de Maple.

Un entier naturel D est *congruent* s'il est l'aire d'un triangle rectangle à cotés rationnels non-nuls. Soit E_D le sous-ensemble du plan défini par

$$E_D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x(x^2 - D^2)\}.$$

Un point de E_D est rationnel si ses deux coordonnées sont rationnelles.

1. Soit (a,b,c) un triplet de nombres rationnels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 = c^2$. On suppose que $ab = 2$. Montrer que $(a^2 - b^2)^2 = c^4 - 16$. En déduire que l'équation $x^4 - y^4 = z^2$ admet des solutions entières avec $xyz \neq 0$. En déduire que 1 n'est pas congruent.

2. Montrer que 5 est congruent. (Indication : on cherchera une solution avec a,b,c de dénominateur 6.)
3. Soit (x,y) un point rationnel de E_D. Montrer que D est congruent. (On posera $a = |D^2 - x^2|/y$ et $b = |2Dx/y|$.)
4. Réciproquement : soient a,b,c trois rationnels strictement positifs tels que $a^2+b^2 = c^2$. Trouver $\lambda \in \mathbf{Q}^+$ tel que

$$\frac{a}{c} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \qquad \frac{b}{c} = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}.$$

   Montrer que si $D = ab/2$, alors $(-D\lambda, D^2(1+\lambda^2)/c)$ est un point rationnel de E_D.
5. A l'aide d'une procédure Maple, prouver que 6 et 7 sont congruents. (Aller suffisament loin dans les calculs.) Quel est le plus petit dénominateur commun que vous trouvez pour les cotés d'un triangle rectangle d'aire 7 ?
6. On admet que si (x,y) est un point rationnel de E_D tel que $y \neq 0$, alors la tangente à E_D en (x,y) coupe E_D en un autre point rationnel, distinct de (x,y). Donner trois autres triangles rectangles d'aire 5. Combien en auriez-vous trouvé sans Maple[1] ? On pourra écrire une procédure qui calcule la tangente à E_D en un point donné, et calcule le nouveau point (utiliser *solve*).
7. (Problème ouvert) Les entiers sans facteur carré congru à 5,6 ou 7 sont-ils congruent[2].

---

[1] D'où l'intérêt de développer des outils conceptuels avancés pour répondre à des questions simples à formuler. Les courbes elliptiques E_D sont l'outil principal qui a permis de démontrer le grand théorème de Fermat pour tout $n \geq 3$.

[2] Au 1^{er} septembre 2004, personne n'a la réponse à cette question