Devoir en temps libre n° 7

Homéomorphisme et convexité

A rendre le lundi 15 novembre

Exercice 1:

Un *homéomorphisme*[1] entre deux parties de $\mathbf{R}$ est une bijection continue de réciproque continue. Deux parties de $\mathbf{R}$ sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme entre les deux. Montrer que tout intervalle contenant au moins deux points est homéomorphe soit à $]0,1[$, soit à $[0,1[$, soit à $[0,1]$.

Exercice 2:

On se propose de montrer que $\alpha = \dfrac{\arccos 1/3}{\pi}$ est irrationnel.

1. Calculer $e^{i\pi\alpha}$.
2. Montrer que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si et seulement si il existe un entier naturel non nul n tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3. Montrer que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$ où a_n et b_n sont des entiers vérifiant $a_n - b_n \neq 0 \mod 3$. Conclure.

Exercice 3:

Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$x \mapsto \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

(On pourra contrôler ses résultats avec Maple.)

Exercice 4:

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

On se propose de montrer que f est convexe de deux manières.

1. Faire un dessin et raisonner par l'absurde.
2. Montrer d'abord que pour x et y fixés, pour tous p et n entiers naturels tels que $p \leq 2^n$, on a

$$f\left(\frac{p}{2^n}x + (1-\frac{p}{2^n})y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + (1-\frac{p}{2^n})f(y)$$

et conclure par un argument de densité.

[1] À ne pas confondre avec un *homomorphisme*, ce qui n'a rien à voir.