Devoir en temps libre n° 6

Calcul différentiel discret

A rendre le jeudi 4 novembre

Soit E l'ensemble des suites $E = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. On considère les applications $\Delta : E \to E$ appelée *dérivée discrète* et $\tau : E \to E$ appelée *décalage (de Bernoulli)* définies pour tout $x \in \mathbf{N}$ par

$$\begin{cases} (\Delta f)(x) & = & f(x+1) - f(x) \\ (\tau f)(x) & = & f(x+1). \end{cases}$$

On définit pour tous $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{rcll} (f+g)(x) & = & f(x) + g(x) & \text{addition des suites} \\ (\lambda f)(x) & = & \lambda f(x) & \text{multiplication externe} \\ (fg)(x) & = & f(x)g(x) & \text{multiplication interne.} \end{array}$$

Partie A

1. Montrer que E muni de l'addition des suites et de la multiplication externe est un espace vectoriel. Étudier les propriétés de la multiplication interne. En particulier, est-il vrai que si $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$?
2. Montrer que pour tous $f, g \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, on a $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta f + \mu\Delta g$ et $\tau(\lambda f + \mu g) = \lambda\tau f + \mu\tau g$. On dit que Δ et τ sont *linéaires*.
3. Déterminer l'image réciproque de $\{0\}$ par Δ et τ. On parle du *noyau* de Δ et de τ.
4. Etudier la distributivité de $\circ$ par rapport à $+$ dans l'expression $\Delta \circ (\tau - \mathrm{Id}_E)$. Exprimer Δ en fonction de τ et Id_E et en déduire la formule de Leibniz :
$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$
où Δ^n désigne la composée de Δ avec elle-même n fois.

5. Montrer que f est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si $\Delta f \geq 0$ (resp. $\Delta f > 0$).
6. Calculer $\Delta(x)$, $\Delta(x^2)$, $\Delta(x^3)$ et pour $k \in \mathbf{N}$ exprimer $\Delta(x^k)$ sous forme de somme.
7. Démontrer la formule de dérivation d'un produit :

$$\Delta(fg) = (\Delta f)\tau g + f(\Delta g).$$

8. Énoncer et démontrer la formule de dérivation d'un quotient.

Partie B

On appelle *primitive* de $f \in E$ toute suite $g \in E$ telle que $\Delta g = f$. On note $\sum f(x)\delta x$ une primitive de g.

1. Montrer que si g_1 et g_2 sont deux primitives de f, il existe un nombre réel c tel que $g_1 = g_2 + c$.
2. Soit $f \in E$ et a, b deux entiers naturels. On définit l'*intégrale* de f entre a et b par

$$\left\{\begin{array}{lllll} \sum_a^b f & = & \sum_a^b f(x)\delta x & = & \sum_{a\leq x<b} f(x) \quad \text{si } a<b \\ \sum_a^b f & = & \sum_a^b f(x)\delta x & = & 0 \quad \text{si } a=b \\ \sum_a^b f & = & \sum_a^b f(x)\delta x & = & -\sum_{b\leq x<a} f(x) \quad \text{si } a>b \end{array}\right. .$$

Montrer que la suite $x \mapsto \sum_a^x f$ est une primitive de f, puis démontrer la formule d'intégration par parties

$$\sum_a^b u\Delta v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \sum_a^b (\Delta u)\tau v.$$

Partie C

Soit $m \in \mathbf{Z}$. Pour tout entier naturel x, on appelle m^e puissance descendante de x, noté $x^{\underline{m}}$ le produit

$$\left\{\begin{array}{lll} x^{\underline{m}} & = & x(x-1)\cdots(x-m+2)(x-m+1) \quad \text{si } m \in \mathbf{N} \\ x^{\underline{m}} & = & \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x-m-1)(x-m)} \quad \text{si } m<0 \end{array}\right. .$$

1. Montrer que pour tous les entiers naturels m et n

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}.$$

2. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbf{Z}$,

$$\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}} \qquad \text{et} \qquad \Delta \tbinom{x}{m} = \tbinom{x}{m-1}.$$

3. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbf{N}$

$$(x+y)^{\underline{m}} = \sum_{0 \leq k \leq m} \tbinom{m}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k}}.$$

Partie D

1. Calculer les primitives de $x^{\underline{m}}$ pour $m \neq -1$.
2. Soit $H_x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$. Ces nombres s'appellent les nombres harmoniques. Montrer que H est une primitive de $x^{\underline{-1}}$.
3. Exprimer k^2, k^3, k^4 comme combinaison linéaire de $k^{\underline{1}}$, $k^{\underline{2}}$, $k^{\underline{3}}$ et $k^{\underline{4}}$. En déduire une expression de $\sum_{a \leq k \leq b} k^2$, $\sum_{a \leq k \leq b} k^3$ et $\sum_{a \leq k \leq b} k^4$.
4. Résoudre l'équation différentielle $\Delta f = f$ puis $\Delta f = (\lambda - 1) f$ où $\lambda \in \mathbf{R}$. En déduire une nouvelle preuve que pour $\lambda \neq 1$

$$\sum_{a \leq k < b} \lambda^k = \frac{\lambda^b - \lambda^a}{\lambda - 1}.$$

5. Calculer $\sum_{a \leq k \leq b} k 2^k$ en intégrant par parties. De même, calculer $\sum_{a \leq k \leq b} k^2 2^k$ et $\sum_{a \leq k \leq b} k H_k$.
6. Montrer que pour m et x entiers naturels

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \tbinom{m}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x \tbinom{x+m}{m}}.$$

Indication : utiliser $\Delta^n((x-1)^{-1})$.

7. En déduire la formule

$$\tbinom{m}{1} - \frac{1}{2} \tbinom{m}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{m} \tbinom{m}{m} = H_m.$$