Devoir en temps libre n° 5
Nombres réels

A rendre le lundi 18 octobre

Problème 1: Sous-groupes de $\mathbf{R}$.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, on désigne par $\alpha\mathbf{Z}$ l'ensemble $\{\alpha n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ et pour toutes parties A et B de $\mathbf{R}$ par $A+B$ l'ensemble $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Un sous-groupe de $\mathbf{R}$ de la forme $\alpha\mathbf{Z}$ est dit *discret*.

1. Montrer que tout sous-groupe H de $\mathbf{R}$ est soit discret, soit dense dans $\mathbf{R}$. (On distinguera selon que $H \cap \mathbf{R}_+^*$ admet ou non un minimum.)
2. Soient a et b deux réels non-nuls et soit $G = a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$. Montrer que G est discret si et seulement si a/b appartient à $\mathbf{Q}$.
3. Montrer qu'une fonction continue admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes est constante.
4. Exhiber une fonction non-constante admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. (Justifier.)
5. Soit $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ un *endomorphisme de groupes*, c'est-à-dire une application du groupe $(\mathbf{R}, +)$ dans lui-même vérifiant pour tous x et y
$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y).$$
Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbf{R}$ est continu si et seulement s'il est de la forme $\varphi(x) = kx$ où k est un nombre réel.

Problème 2: [addition parallèle]

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On appelle *somme parallèle*[1] de a et de b le nombre
$$a//b = \frac{ab}{a+b}$$

1. Etudier les propriétés de cette opération.
2. Soit x un réel quelconque. Montrer que
$$(a//b)x^2 = \inf\{ay^2 + bz^2, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y+z = x\}$$
Cette borne inférieure est-elle un plus petit élément ? Si oui, pour quels couples (y_0, z_0) de nombres réels la relation
$$(a//b)x^2 = ay_0^2 + bz_0^2$$
est-elle satisfaite ?

[1] d'après X 99 PC 1

3. Interpréter physiquement les résultats de la question précédente en prenant pour y et z les intensités des courants électriques qui traversent des résistances a et b montées en parallèle.
4. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs et x un réel quelconque, montrer que
$$(a//c)x^2 + (b//d)x^2 \leq ((a+b)//(c+d))x^2$$
Interpréter physiquement cette inégalité.
5. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ des réels strictement positifs. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i//\beta_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)//\left(\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right)$$

Problème 3:

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème *Pour tout nombre rationnel non-nul r, le nombre réel e^r est irrationnel.*

1. Montrer qu'il suffit de démontrer que pour tout entier r non-nul, e^r est irrationnel.
2. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a l'inégalité
$$\frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$
   (c) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 2$, on a
$$n! > e\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
   (d) En déduire que quels que soient les entiers a et r, il existe un entier n_0 tel que
$$n_0! > a\,r^{2n_0+1}.$$
3. Soient n un entier naturel et P_n la fonction polynomiale définie par l'expression
$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n.$$
   (a) Montrer qu'il existe des entiers c_j avec $n \leq j \leq 2n$ tels que $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{j=n}^{2n} c_j x^j$.

(b) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$

$$0 < P_n(x) < \frac{1}{n!}.$$

(c) Montrer par récurrence sur k que pour tout entier k avec $0 \leq k \leq n-1$, il existe une fonction polynomiale $Q_{n,k}$ telle que

$$P_n^{(k)}(x) = x^{n-k} Q_{n,k}(x).$$

En déduire que $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $0 \leq k \leq n-1$.

(d) Montrer que pour tout entier k tel que $n \leq k \leq 2n$, $P_n^{(k)}(0)$ est un entier.

(e) Montrer que pour tout entier k inférieur ou égal à $2n$, $P_n^{(k)}(1)$ est un entier. (On pourra utiliser $P_n(1-x)$.)

4. On démontre désormais le théorème par l'absurde : On suppose qu'il existe un entier r non-nul et deux entiers a et b strictement positifs tels que $e^r = \frac{a}{b}$.
On considère, pour tout entier $n \geq 1$,

$$F_n(x) = r^{2n} P_n(x) - r^{2n-1} P_n'(x) + r^{2n-2} P_n''(x) - \cdots + (-1)^k r^k P_n^{(2n-k)}(x) + \cdots + P_n^{(2n)}(x).$$

(a) Montrer que $F_n'(x) = -rF_n(x) + r^{2n+1} P_n(x)$.

(b) Montrer que $(e^{rx} F_n(x))' = r^{2n+1} e^{rx} P_n(x)$.

(c) Soit $N = b \displaystyle\int_0^1 r^{2n+1} e^{rx} P_n(x) dx$. Exprimer N en fonction de $a, b, F_n(0)$ et $F_n(1)$. En déduire que N est entier.

(d) On rappelle que pour une fonction continue f, positive et non-identiquement nulle, majorée par M sur $[0,1]$, on a $0 < \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \leq M$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$0 < N \leq \frac{a\, r^{2n+1}}{n!}.$$

(e) En déduire le théorème.