Devoir en temps libre n^o 3

Équations différentielles

A rendre le lundi 4 octobre

Exercice 1:

Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

On pourra considérer $\alpha = \frac{f''(x_0)}{f(x_0)}$.

Problème 1: Soit α un réel non-nul et I l'intervalle $]0, +\infty[$. On considère l'équation différentielle

$$tx'(t) - \alpha x(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation sur I. Expliciter u_0 la solution qui vaut 1 en $t = 1$.
2. Expliciter la solution u_1 définie sur I vérifiant $u_1(1) = 0$ de l'équation différentielle
$$tx'(t) - \alpha x(t) = u_0(t).$$
3. Donner la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{n!}\frac{(\log t)^n}{t}$ définie sur I et valant 0 en $t = 1$.
4. On définit par récurrence sur n une fonction u_{n+1} sur I comme solution de l'équation différentielle
$$tx'(t) - \alpha x(t) = u_n(t)$$
et prenant la valeur 0 en $t = 1$. Expliciter $u_n(t)$.

Problème 2: On appelle *équation de Cauchy* une équation différentielle de la forme

$$x^2y'' + axy' + by = d(x)$$

où $a, b \in \mathbf{R}$ et d est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On se propose de résoudre cette équation par deux méthodes.

1. Première méthode. On la traite sur l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' - y = 0. \tag{1}$$

   Trouver une solution de la forme x^r, puis en déduire toutes les solutions. (On justifiera soigneusement l'exhaustivité des solutions.)

2. Deuxième méthode : On résout l'équation successivement sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ en posant $x = e^t$ et $x = -e^t$. Si $x \mapsto g(x)$ est une solution de (1), montrer que $t \mapsto z(t) = g(e^t)$ est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants. En déduire les solutions de (1).

3. Résoudre les équations (par les deux méthodes)

$$x^2y'' - xy' - 3y = x^4 \tag{2}$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0. \tag{3}$$