Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 2

Le théorème de Morley

A rendre le lundi 20 septembre

Problème 1: [Théorème de Morley]

Les trisectrices sont les droites qui découpent un angle en trois angles égaux. L'objet de ce problème est de présenterle théorème de Morley (fig1) relatifs aux trisectrices d'un angle.

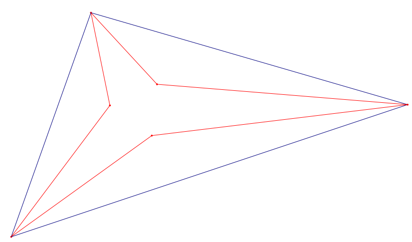

Fig. 1 – théorème de Morley

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct qui permet de définir l'affixe complexe d'un point et le représentant d'un nombre complexe.

- Les nombres complexes a, b, c sont les affixes de trois points A, B, C.
- Les nombres réels α, β, γ sont dans $]0, \frac{\pi}{3}[$ et vérifient
  - 3α est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
  - 3β est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$
  - 3γ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
- Les nombres complexes u, v, w sont définis par

$$u = e^{2i\alpha}, v = e^{2i\beta}, w = e^{2i\gamma}$$

- On définit aussi les transformations complexes R_a, R_b, R_c par

$$\begin{aligned} R_a(z) &= u(z-a)+a \\ R_b(z) &= v(z-b)+b \\ R_c(z) &= w(z-c)+c \end{aligned}$$

Partie I : calculs préliminaires

1. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Soit Z_1, Z_2, Z_3 trois points distincts d'affixes z_1, z_2, z_3 tels que

$$z_1 + jz_2 + j^2 z_3 = 0$$

   Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}, \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}, \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

   en déduire que le triangle (Z_1, Z_2, Z_3) est équilatéral.
3. Montrer que uv, vw, wu sont différents de 1 et que $uvw = j$.
4. Mettre sous forme trigonométrique les deux nombres complexes

$$\frac{u(1-v)}{1-uv}, \frac{1-u}{1-uv}$$

5. On considère trois nombres complexes p, q, r vérifiant les relations suivantes

$$\begin{aligned} (1-v)b + v(1-w)c &= p(1-vw) \\ (1-w)c + w(1-u)a &= q(1-wu) \\ (1-u)a + u(1-v)b &= r(1-uv) \end{aligned}$$

   On pose

$$E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p + jq + j^2 r)$$

   Montrer que

$$E = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1)a + \frac{u}{v}(v^3 - 1)b + \frac{v}{w} j(w^3 - 1)c$$

Partie II : point fixe de $R_a \circ R_b$

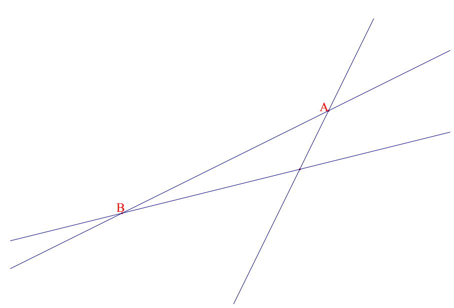

FIG. 2 – Point fixe de $R_a \circ R_b$

On appelle *point fixe* d'une transformation complexe f tout nombre complexe z tel que $f(z) = z$.

1. Caractériser les transformations géométriques associées aux transformations complexes R_a, R_b, R_c
2. Montrer que $R_a \circ R_b$ a un unique point fixe r vérifiant
$$(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$$
Le représentant du complexe r est le point R.
3. En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, préciser l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$
4. Préciser de même l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$
5. On définit de même p, P, q, Q à partir de
$$R_b \circ R_c(p) = p, R_c \circ R_a(q) = q$$
Reproduire approximativement sur votre copie la figure 1 et placer les points P, Q, R.

Partie III : configuration principale de Morley

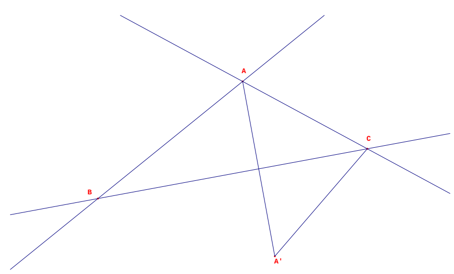

FIG. 3 – image de A par R_c^3

1. (a) Ici R_c^3 désigne $R_c \circ R_c \circ R_c$. Montrer que le représentant de $R_c^3(a)$ est le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
   (b) Montrer que $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3$ est l'identité de $\mathbb{C}$
2. Calculer $R_a^3 \circ R_b^3 \circ R_c^3(z)$. En déduire que
$$(1-u^3)a + u^3(1-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0$$
3. Démontrer que le triangle (P, Q, R) est équilatéral (théorème de Morley).