

Devoir en temps libre n° 25 - Facultatif

La courbe de Peano

À rendre le lundi 23 mai

Problème

Qu'est-ce qu'une «courbe»? Ce mot, jamais défini mais d'usage constant, fait penser à ce qui peut être dessiné par un crayon. On pense donc au support d'une courbe paramétrée. Comme on va le voir, il existe alors de drôles de «courbes».

Soit C le pavé $[0, 1]^2$ de \mathbf{R}^2 . Pour tout entier $n \geq 1$, on définit par récurrence une subdivision $(C_n^k)_{0 \leq k \leq 4^n - 1}$ de C en 4^n pavés carrés de cotés $1/2^n$ de la manière suivante :

Initialisation : Pour $n = 1$, on subdivise C en quatre carrés de coté $1/2$ numérotés $C_1^0, C_1^1, C_1^2, C_1^3$ tels que C_1^j et C_1^{j+1} ont un coté commun.

Hérédité : On suppose construite la subdivision $(C_n^k)_{0 \leq k \leq 4^n - 1}$ et on obtient la subdivision $(C_{n+1}^k)_{0 \leq k \leq 4^{n+1} - 1}$ en subdivisant chaque C_n^k en quatre carrés égaux de manière à ce que C_{n+1}^k et C_{n+1}^{k+1} aient une arête commune (et ceci pour tout k compris entre 0 et $4^{n+1} - 2$) avec

$$C_n^l = \bigcup_{k=4l}^{4l+3} C_{n+1}^k.$$

À tout $t \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$ associons le carré $K_n(t) = C_n^{E(4^n t)}$ où E désigne la partie entière.

1. Dessiner une disposition possible des 16 premiers carrés définis. (Elle n'est pas unique.)
2. Montrer qu'il est bien possible comme l'affirme la construction ci-dessus de choisir les C_n^k tels que C_n^k et C_n^{k+1} aient une arête commune.
3. Montrer que $K_{n+1}(t) \subset K_n(t)$ et montrer que l'intersection

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} K_n(t)$$

est réduite à un point dont on note $(x(t), y(t))$ les coordonnées.

4. Montrer que les applications x et y définies sur $[0, 1[$ dans la question précédente sont uniformément continues. Montrer qu'elles se prolongent par continuité en 1. On note encore x et y les fonctions prolongées.
5. Montrer que la courbe paramétrée définie sur $[0, 1[$ par $t \mapsto (x(t), y(t))$ est surjective sur C .

Donc C est le support d'un arc paramétré continue. Peut-on l'appeler une «courbe»?