Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 23

Fonctions harmoniques

À rendre le lundi 9 mai

Problème 1

Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit Γ la courbe de niveau $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$. On suppose que $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$ restreint à Γ n'est jamais nul.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On cherche les extrema de la fonction f restreinte à Γ. On parle alors d'*extrema liés*.

1. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, que Γ est une courbe régulière, *i.e.* il existe un paramétrage local $t \mapsto (x(t), y(t))$ de Γ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de tout $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tel que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ et $(x'(0), y'(0)) \neq (0,0)$.
2. Soit (x_0, y_0) un extremum local de f restreinte à Γ. Montrer que $(x'(0), y'(0))$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)} f$, puis qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ (le multiplicateur de lagrange) tel que
$$\overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)} f = \lambda_0 \overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0)} g.$$
3. On pose $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$. Montrer qu'une condition nécessaire pour que (x_0, y_0) soit un extremum lié est qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ tel que
$$\overrightarrow{\text{grad}}_{(x_0,y_0,\lambda_0)} \mathcal{L} = 0.$$
4. Une application : Soient $a, b \geq 0$ non tous deux nuls et $p \in]1, +\infty[$. On cherche le maximum de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = ax + by$ avec la contrainte $|x|^p + |y|^p = 1$. On pose $q = \frac{p}{p-1}$.
   (a) Montrer l'existence du maximum. Dessiner l'ensemble d'équation $|x|^p + |y|^p = 1$.
   (b) Montrer que le multiplicateur de Lagrange λ vérifie
   $$\left(\frac{a}{\lambda p}\right)^q + \left(\frac{b}{\lambda p}\right)^q = 1.$$
   En déduire une expression du maximum.
   (c) Pour tout vecteur $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on définit $\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$. Soit (u,v) un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$ avec $u, v \geq 0$. Vérifier que
   $$au + bv \leq \|(u,v)\|_p \|(a,b)\|_q.$$
   (d) En déduire que pour toute famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on a l'inégalité de Hölder :
   $$\left|\sum_{1 \leq k \leq n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{1 \leq k \leq n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   (e) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$. (Écrire $|x_k + y_k|^p \leq |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$ et appliquer Hölder.) Que dire du cas $p = 2$? Que peut-on dire lorsque p tend vers 1 ? Et vers $+\infty$?

Problème 2[1]

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, définies dans un ouvert $\mathcal{U}$ du plan $\mathbf{R}^2$ et deux fois continûment dérivable. Le laplacien de f est par définition la fonction notée Δf définie dans $\mathcal{U}$ par

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

La fonction f est harmonique si et seulement si son laplacien est nul en tout point de $\mathcal{U}$. Par exemple, en électrostatique, le potentiel électrique dans le vide est harmonique.

Le but du problème est de donner des exemples de telles fonctions, puis d'en démontrer certaines propriétés : principe du maximum, propriété de la moyenne, le fait que les fonctions harmoniques bornées dans le plan sont constantes.

Le plan $\mathbf{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

Partie 1 - Quelques exemples de fonctions harmoniques

1. * Démontrer que les fonctions complexes f et g_n où $n \in \mathbf{N}$ définies dans $\mathbf{R}^2$ par les relations suivantes sont harmoniques :

$$f(x,y) = e^{x+iy}, \qquad g_n(x,y) = (x+iy)^n.$$

2. * Déterminer les fonctions u réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $]0,+\infty[$ telles que chaque fonction h, définie dans le plan $\mathbf{R}^2$ privé de $O=(0,0)$ par la relation ci-dessous, soit harmonique :

$$h(x,y) = u(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Poser si nécessaire $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Partie 2 - Principe du maximum

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbf{R}^2$. Soit $r>0$. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon r et C le cercle de centre O et de rayon r.

Pour tout entier p strictement positif, on définit sur $\mathbf{R}^2$ la fonction f_p par

$$f_p(x,y) = f(x,y) + \frac{x^2+y^2}{p}.$$

1. * Montrer l'existence d'un point M_p de coordonnées (a_p,b_p) appartenant au disque fermé D en lequel f_p atteint son maximum.
2. * Démontrer que si M_p n'appartient pas à C, on a simultanément

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p,b_p) \le 0 \qquad \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p,b_p) \le 0.$$

3. * En déduire, en calculant par exemple le laplacien de f_p, que le point M_p est situé sur C.
4. * Démontrer que f atteint un maximum dans D en un point P situé sur C.
5. * En déduire que deux fonctions harmoniques dans $\mathbf{R}^2$ égales le long d'un cercle C du plan de rayon strictement positif sont égales dans tout le disque de frontière C.

[1] D'après Mines-Ponts MP 2004. Les questions munies d'une étoile sont les questions originales, à quelques détails de formulation près.

Partie 3 - Propriété de la moyenne

On admet provisoirement les deux théorèmes suivant :

Continuité sous le signe somme *Soit* $[a,b]$ *un segment non-vide de* $\mathbf{R}$*,* I *un intervalle et* $f : I \times [a,b] \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. Alors l'application de* I *dans* $\mathbf{R}$ *définie par*

$$x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$$

est continue.

Dérivabilité sous le signe somme *Soit* $[a,b]$ *un segment non-vide de* $\mathbf{R}$*,* I *un intervalle et* $f : I \times [a,b] \to \mathbf{R}$ *une fonction continue telle que l'application partielle* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe et soit continue sur* $I \times [a,b]$*. Alors l'application de* I *dans* $\mathbf{R}$ *définie par*

$$\Phi : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *et pour tout* $x \in I$ *on a*

$$\Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans $\mathbf{R}^2$. Étant donné un point M_0 de coordonnées (x_0,y_0) et ρ un réel positif ou nul, on définit la fonction F sur $[0,+\infty[$ par

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)\, d\theta.$$

1. * Démontrer que F est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
2. * Démontrer que la fonction F est continûment dérivable. Préciser sa dérivée $F'(\rho)$.
3. * Démontrer que le produit $\rho F'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\alpha = A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy$ le long d'un arc orienté Γ, *i.e ;*

   $$\rho F'(\rho) = \int_\Gamma A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy.$$

   Préciser α et Γ.
4. * Démontrer que F est constante et préciser sa valeur.
5. * Soit D le disque fermé de centre M_0 et de rayon $r > 0$. Démontrer que l'intégrale double I de f sur D se calcule facilement en fonction de $f(x_0,y_0)$ par la relation

   $$I = \iint_D f(x,y)\, dxdy = \pi r^2 f(x_0,y_0).$$

Partie 4 - Fonctions harmoniques bornées dans le plan

Soit f une fonction réelle définie dans $\mathbf{R}^2$ harmonique et bornée ; il existe donc un réel C tel que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$

$$|f(x,y)| \le C.$$

1. * Soient D_1 et D_2 deux disques fermés de même rayon $r > 0$ et centres distincts, respectivement $O = (0,0)$ et $M_0 = (x_0,y_0)$. On suppose que la distance d entre O et M_0 est strictement inférieure à r. Soit L_2 l'ensemble des points du disque D_2 qui n'apppartiennent pas à D_1.

   En considérant un disque contenu dans l'intersection des disques D_1 et D_2, démontrer que l'aire de L_2 est majoré par $\pi r d$.

2. * Donner un majorant de $|f(x_0,y_0) - f(0,0)|$ au moyen de C, r et d. En déduire que f est constante.
3. Une application : une preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

   Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré ≥ 1. On se propose de montrer par l'absurde que P admet une racine. Supposons donc $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

   (a) On considère la fonction $h : (x,y) \mapsto \frac{1}{|P(x+iy)|}$. Montrer que h est harmonique sur $\mathbf{R}^2$.

   (b) Montrer qu'il existe un $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| > R$, on ait $|P(z)| > 2|P(0)|$. (Étudier $|P(z)|$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$.)

   (c) En déduire que $|P|$ admet un minimum sur $\mathbf{C}$ et conclure.

Partie 5 - Démonstration des résultats admis

1. Démontrer le théorème de continuité sous le signe somme. (Choisir un point x_0 puis restreindre à un pavé et utiliser l'uniforme continuité).
2. Démontrer le théorème de dérivabilité sous le signe somme. (Utiliser la formule des accroissements finis et la question précédente.)