Devoir en temps libre n^o 20

Espaces euclidiens

A rendre le lundi 26 avril

Exercice 1: [Suite et fin du DM 18]

Partie 5 - Système de racines de $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})$

Soit $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})$, c'est-à-dire l'algèbre de Lie des matrices 3×3 de trace nulle. Soit $\mathcal{H}$ le sous-espace de $\mathcal{G}$ des matrices diagonales. Soit $I = \{(i,j)\in\{1,2,3\}^2 \,|\, i\neq j\}$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{H}$ admet pour base (F_1,F_2).
   (b) Montrer que l'application $(M,N)\mapsto 2\,\mathrm{Tr}(MN)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}$ que l'on note désormais $<M|N>$. Les vecteurs F_1 et F_2 sont-ils orthogonaux ?
   (c) Orthonormaliser la base (F_1,F_2) par le procédé de Schmidt. On note (G_1,G_2) cette nouvelle base. Exprimer les coordonnées de F_1 et F_2 dans cette base orthonormée. (On fera un dessin.)
2. Soit M une matrice diagonale de $\mathcal{M}(3,\mathbf{R})$. Montrer que pour tout couple $(i,j)\in I$, il existe un nombre réel $\alpha_{i,j}(M)$ tel que $\mathrm{ad}_M(E_{i,j}) = \alpha_{i,j}(M)E_{i,j}$.
3. (a) Montrer que l'application $\alpha_{i,j} : \mathcal{H}\to\mathbf{R}$ qui à M associe $\alpha_{i,j}(M)$ est une forme linéaire.
   (b) Exprimer les $\alpha_{i,j}$ en fonction de la base duale de (F_1,F_2) de $\mathcal{H}$.
   (c) Trouver deux vecteurs $f_1, f_2\in\mathcal{H}$ tels que $<f_k|F_l>=\delta_{kl}$, $k,l\in\{1,2\}$. En déduire un vecteur $H_{i,j}\in\mathcal{H}$ tel que pour tout $M\in\mathcal{H}$
   $$\alpha_{i,j}(M) = <H_{i,j}|M>.$$
   Placer les vecteurs $H_{i,j}$ pour $(i,j)\in I$ sur le dessin précédent.
4. Soit $s_{i,j}$ la reflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(H_{i,j})^{\perp}$. Montrer que le groupe engendré par les $s_{i,j}$, $(i,j)\in I$ est isomorphe au groupe des permutations d'un ensemble à trois éléments.

Exercice 2: [1] [Un exemple de structure euclidienne]

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}_n[X]$. Pour $p, Q \in E$ on pose :

$$< P|Q >= \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i).$$

Partie I

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E. On notera $\|P\|_2$ la norme euclidienne du polynôme P associée au produit scalaire précédent.
2. Montrer qu'il existe une unique famille $(L_0, \dots, L_n)$ de E telle que $L_i(j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \{0, 1, \dots, n\}^2$. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E. Que peut-on dire du degré du polynôme $X^n + (-1)^{n+1} n! L_0$?
3. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ d'un vecteur N de E orthogonal à l'hyperplan H de E formé des polynômes de degré $\leq n - 1$.

   Si $P \in E$, on note $\mathrm{d}(P, H) = \inf_{Q \in H} \|P - Q\|_2$ la distance de P à l'hyperplan H.

   Montrer que $\mathrm{d}(X^n, H) = n! \mathrm{d}(L_0, H)$.
4. En remarquant que $(1 + X)^{2n} = (1 + X)^n (1 + X)^n$, exprimer $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$ à l'aide d'un seul coefficient binomial.
5. En déduire la valeur de $\mathrm{d}(X^n, H)$.

Partie II

Un endomorphisme d'un espace euclidien E est *autoadjoint* si pour tous $x, y \in E$, $< f(x)|y >=< x| f(y) >$.

On note $\Pi = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} (X - i)$ et on fixe un polynôme M_0 dans E. On considère l'application ϕ de E dans E qui à tout P associe le reste de la division euclidienne de $M_0 P$ par Π.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.
2. Exprimer $\phi(L_i)$ en fonction de L_i. En déduire que ϕ est un endomorphisme autoadjoint de E.
3. Donner un condition nécessaire et suffisante portant sur M_0 pour que ϕ soit un automorphisme orthogonal de E. Quelle est alors sa nature géométrique ?
4. On note $\mathcal{B}(0, 1) = \{P \in E \mid \|P\|_2 \leq 1\}$. Exprimer

   $$\min_{P \in \mathcal{B}(0,1)} < \phi(P)|P > \quad \text{et} \quad \max_{P \in \mathcal{B}(0,1)} < \phi(P)|P >$$

   à l'aide des $M_0(i)$.

[1] Extrait de Centrale 2002 PSI