Devoir en temps libre n° 18

Algèbre linéaire et calcul matriciel

A rendre le lundi 7 mars

Exercice 1: [Quaternions]

1. Montrer que $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ est un corps isomorphe à $\mathbf{C}$.
2. Montrer que $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \overline{-b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{C} \right\}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre. Est-elle commutative ?
3. Montrer que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.
4. Résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{H}$. En déduire que l'on ne travaille pas impunément avec des corps non-commutatifs.

Exercice 2: [La base de Hilbert]

L'objectif du problème est de caractériser les polynômes complexes qui prennent des valeurs entières sur les entiers.

On considère les polynômes $H_n = \binom{X}{n} = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} \in \mathbf{C}[X]$.

1. Montrer que $H_n(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$. En déduire que le produit de n entiers relatifs consécutifs est divisible par $n!$. Un polynôme qui prend des valeurs entières sur les entiers est-il nécessairement dans $\mathbf{Z}[X]$?
2. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ avec $\deg P \leq n$. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés :
   (a) $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$;
   (b) $P(k) \in \mathbf{Z}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$;
   (c) il existe des entiers $c_k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq k \leq n$, tels que $P = \sum_{0 \leq k \leq n} c_k H_k$.

Problème

Ce problème est centré sur l'étude de quelques *algèbres de Lie*. Une algèbre de Lie est un espace vectoriel V muni d'une loi de composition interne bilinéaire, généralement notée $(u, v) \mapsto [u, v]$, et vérifiant pour tous $u, v, w \in V$

$$[u, u] = 0 \tag{1}$$

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \tag{2}$$

La deuxième équation (2) porte le nom d'*identité de Jacobi*.

Partie 1 - Calculs préliminaires

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie.

1. Donner un exemple d'algèbre de Lie rencontrée en début d'année.
2. Dans une algèbre de Lie, montrer que le crochet est antisymétrique, *i.e.* pour tous $u, v \in V$, $[u, v] = -[v, u]$.

3. Pour tout $u \in \mathcal{G}$, on désigne par ad_u l'endomorphisme de $\mathcal{G}$ défini par $\mathrm{ad}_u(v) = [u,v]$. Montrer que pour tous $u,v,w \in \mathcal{G}$, $\mathrm{ad}_u([v,w]) = [\mathrm{ad}_u(v),w] + [v,\mathrm{ad}_u(w)]$.
4. Montrer que $M(n,\mathbf{R})$ muni du crochet $[A,B] = AB - BA$ est une algèbre de Lie.

Partie 2 - Un algèbre de Lie semi-simple

Soit $\mathrm{Tr} : M(n,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ l'application qui à une matrice associe la somme de ses termes diagonaux. On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer que Tr est linéaire et que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En déduire que si $P \in GL(n,\mathbf{R})$, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}A$.
2. Soit $\mathcal{G}$ le sous-ensemble constitué des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $M(n,\mathbf{R})$. Quelle est sa dimension ?
3. Soit Ei,j la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1. Soit $F_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Montrer que la famille des $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et F_i forme une base de $\mathcal{G}$.
4. Soit V le sous-espace vectoriel engendré par les $[A,B]$ où $A,B \in M(n,\mathbf{R})$.
   (a) Montrer que $[A,B]$ appartient à $\mathcal{G}$.
   (b) Calculer les crochets $[E_{i,j},E_{j,k}]$ et $[E_{i,i+1},E_{i+1,i}]$.
   (c) En déduire $V = \mathcal{G}$.

Partie 3 - Tout hyperplan contient une matrice inversible

Soit n un entier ≥ 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On désigne par f_A l'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_A(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

1. Montrer que l'application $f : A \mapsto f_A$ est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et son dual.
2. Soit r un entier naturel tel que $r \leq n$. Soit J_r la matrice de coefficients $(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où $m_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j}, & \text{si } 1 \leq i,j \leq r\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$
   Montrer qu'il existe $Y \in \mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(J_rY) = 0$.
3. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ contient un élément de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$.
4. (Facultatif) Montrer que ce résultat est valable pour tout corps.

Partie 4 - Un $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$-module

Pour $(p,q) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, on appelle *monôme* de type (p,q) la fonction $(x,y) \mapsto x^py^q$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit E_n comme le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x^py^q)_{p+q=n}$.

1. Montrer que la famille $(x^ky^{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de E_n.
2. Soient T,U,V les applications définies sur E_n par
$$Tf(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
$$Uf(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad Vf(x,y) = y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$
   Montrer que T,U,V sont des endomorphismes de E_n.
3. Exemple : soit $n = 3$. Donner les matrices de T,U,V dans la base ci-dessus de E_3.
4. Parmi T,U,V, lesquels sont des automorphismes ? (On pourra distinguer suivant la parité de n.)
5. Pour $A,B \in \mathcal{L}(E_n)$, on pose $[A,B] = A\circ B - B\circ A$. Exprimer les crochets $[T,U]$, $[T,V]$ et $[U,V]$ en fonction de T,U,V.