Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 17

Algèbre linéaire en dimension finie

A rendre le lundi 14 février

Dans l'énoncé, on écrira souvent uv à la place de $u \circ v$, lorsque u et v sont deux applications linéaires.

Exercice 1: Cet exercice est difficile. Ne pas y passer trop de temps, mais ne pas non plus l'ignorer

Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que
$$\mathcal{L}_V(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid V \subset \operatorname{Ker} u\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. Déterminer sa dimension en fonction de $n = \dim E$, $p = \dim V$ et $q = \dim F$. (On pourra introduire un supplémentaire W de V dans E et considérer $u \mapsto u_{|W}$.)
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$V_1 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid fuf = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et exprimer sa dimension en fonction de $\operatorname{rg} f$.

Problème

Partie 1 - Le théorème de Bézout

Soient P_1 et P_2 deux polynômes non-nuls et premiers entre eux de $\mathbf{R}[X]$ de degrés respectifs n_1 et n_2. Soit $n = n_1 + n_2$. On considère les deux ensembles

$$E_1 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \text{il existe } Q \in \mathbf{R}_{n_2}[X] \text{ tel que } P = QP_1\}$$

$$E_2 = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \text{il existe } Q \in \mathbf{R}_{n_1}[X] \text{ tel que } P = QP_2\}.$$

1. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}[X]$.
2. Soit $\phi_1 : \mathbf{R}_{n_2}[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ l'application définie par $\phi_1(Q) = QP_1$. Montrer que ϕ_1 est linéaire, injective et que $\operatorname{Im} \phi_1 = E_1$.
3. Calculer les dimensions de E_1 et E_2.
4. Montrer que $E_1 \cap E_2 = \operatorname{Vect}(P_1 P_2)$. En déduire que $E_1 + E_2 = \mathbf{R}_n[X]$.
5. En déduire le théorème de Bézout pour les polynômes.

Partie 2 - Congruences modulo un polynôme

Soit $Q \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Soit E_Q le sous-espace de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes de degrés strictement inférieur à n.

Soit $A \in \mathbf{R}[X]$. On considère $f_A : E_Q \to E_Q$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de PA par Q. Lorsque A est sous-entendu, on pourra écrire f à la place de f_A.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Un cas particulier. On suppose dans cette question que $Q = X^3 + aX^2 + bX + c$ et $A = \lambda - X$, où a, b, c, $\lambda \in \mathbf{R}$.
   (a) Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique de E_Q.
   (b) On suppose $Q = X^3 - X^2 - 3X + 2$ et $A = 2 - X$. Déterminer une base de l'image et une base du noyau de f.
   (c) On suppose $Q = X^3 - X + 1$ et $A = 1 - X$. Montrer que f est inversible.
3. On retourne au cas général.
   (a) On suppose que A et Q sont premiers entre eux. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. Montrer que Q divise P. En déduire que f est injective.
   (b) Soit D un diviseur commun de A et Q. Montrer que pour tout P de E_Q, D divise $f(P)$.
   (c) Montrer que f est bijective si et seulement si A et Q sont premiers entre eux.
   (d) Quelle est l'image de f dans le cas général ?
4. On considère la loi de composition interne suivante sur E_Q : pour A, $B \in E_Q$, on pose $A \star B = f_A(B)$.
   (a) Montrer que $(E_Q, \star, +)$ est un anneau commutatif.
   (b) On suppose que Q est irréductible sur $\mathbf{R}$. Montrer que E_Q est un corps.
   (c) On suppose $Q = X^2 + 1$. Montrer que E_Q est isomorphe au corps des nombres complexes.
   (d) On suppose que Q n'est pas irréductible. Montrer que E_Q n'est pas intègre.