Devoir en temps libre n° 16

Algèbre linéaire sans dimension

A rendre le lundi 7 février

Exercice 1: [Lemme des noyaux itérés]

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on définit $K_p = \operatorname{Ker} f^p$ et $I_p = \operatorname{Im} f^p$.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. Montrer qu'il existe un entier $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$. On suppose r minimal avec cette propriété. Que dire de la suite $(K_p)_{p \geq r}$? Montrer que $I_r = I_{r+1}$ et que la suite $(I_p)_p$ est constante à partir du rang r.
3. Montrer que $E = K_r \oplus I_r$. Que dire de f restreinte à K_r et I_r ?

Exercice 2: On considère les ensembles suivants

$$E = C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$$

$$F = \{g \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid g(0) = g'(0) = 0 \text{ et } g' \text{ dérivable en } 0\}$$

ainsi que l'application

$$\begin{array}{rrcl} \Phi & : & E & \longrightarrow F \\ & & f & \longmapsto \Phi_f : x \mapsto \int_0^x t\, f(t)\, dt \ . \end{array}$$

1. Montrer que E et F sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.
2. Vérifier que $\Phi_f \in F$ et que Φ est linéaire.
3. Soit $g \in F$. On définit f par $f(x) = g'(x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = g''(0)$. Montrer que $f \in E$ et en déduire que Φ est surjective.
4. Montrer que Φ est un isomorphisme.

Exercice 3: Soit $E_k = \mathcal{D}^k(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions k fois dérivables sur $\mathbf{R}$. Soit $F = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

On note $\Phi : E_k \to E_{k-1}$ l'application définie par $\Phi(f) : x \mapsto x f'(x)$. On désigne aussi par Φ_a et Φ_b respectivement les applications $\Phi_a = \Phi - a\,\mathrm{Id}$ et $\Phi_b = \Phi - b\,\mathrm{Id}$.

Soit $\Psi : E_2 \to F$ donnée par $\Psi = \Phi_a \circ \Phi_b$.

1. Montrer que Ψ est linéaire.
2. Soit S le sous-ensemble de E_2 formé des fonctions vérifiant l'équation

$$x^2 f''(x) + (1 - a - b) x f'(x) + ab f(x) = 0. \qquad (1)$$

Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E_2.

3. Montrer que $S = \operatorname{Ker}\Psi$. En déduire une nouvelle démonstration de la question précédente.
4. (a) Justifier $\Phi_a \circ \Phi_b = \Phi_b \circ \Phi_a$.
   (b) Exprimer $\Phi_a - \Phi_b$ en fonction de Id_{E_2}, de a et de b.
   (c) Montrer que si $y \in S$, alors $\Phi_a(y) \in \operatorname{Ker}\Phi_b$ et $\Phi_b(y) \in \operatorname{Ker}\Phi_a$.
   (d) Montrer que $S = \operatorname{Ker}\Phi_a \oplus \operatorname{Ker}\Phi_b$.
5. En déduire les solutions de (1) sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$.
6. A quelles conditions sur a et b les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ se prolongent-elles en une solution définie sur tout $\mathbf{R}$? A quelles conditions existe-t-il une solution non-nulle ?