Devoir en temps libre n° 9

Autour de la moyenne de Césaro

A rendre le lundi 29 novembre

Exercice 1: Soit $f(t) = \frac{1}{2}(t + E(t) + 1)$. Étudier la convergence et la monotonie de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 2:

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique $t_n \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan t_n = t_n$.
2. Montrer l'équivalence $t_n \sim n\pi$ puis $t_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
3. Donner le terme suivant dans le développement asymptotique.

Exercice 3:

1. Soit $a_n \in \mathbf{C}$ et $b_n > 0$. On définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. On suppose que $\lim S_n = +\infty$. Montrer que si (a_n) converge vers l, alors $\frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ aussi.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes convergentes, respectivement vers a et b. Montrer que
$$\lim \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = ab.$$
3. Soit (a_n) une suite complexe convergente de limite a. Montrer que
$$\lim \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a.$$
4. (a) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim \Delta(u)(n) = l \in \overline{\mathbf{R}}$. Montrer que $\lim \frac{u_n}{n} = l$.
   (b) On suppose $u_n > 0$. Montrer que si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$, alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = \alpha$.
   (c) En déduire la limite des suites de terme général ($p \in \mathbf{N}^*$) :
$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}, \quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)}, \quad \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{n^n}} \quad \frac{1}{n^{p-1}}\sqrt[n]{\frac{(pn)!}{n!}}.$$
5. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant 0. On suppose qu'au voisinage de 0,
$$f(x) = x - ax^{\beta} + o(x^{\beta})$$
avec $a > 0$ et $\beta > 1$. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose en outre que $u_n > 0$ et $\lim u_n = 0$.

(a) Déterminer $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que $u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma}$ converge vers $l \in \mathbf{R}^*$.

(b) En déduire un équivalent de u_n.

(c) Application : pour les fonctions suivantes, donner un intervalle J tel que pour $u_0 \in J$, $u_n > 0$ et $\lim u_n = 0$, puis un équivalent de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$f_1(x) = xe^{-x} \qquad f_2(x) = \ln(1+x) \qquad f_3(x) = x - x^2 \qquad f_4(x) = \sin x.$$

(On utilisera sans démonstration le fait que $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ en 0.)