Interrogation 12 : Polynômes

Semaine du 3 au 8 janvier.

Programme :

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes et des fractions rationnelles, et d'exploiter ces objets formels pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite au cas où le corps de base est **K**, *où* **K** *désigne* **R** *ou* **C**.

a) Polynômes à une indéterminée et corps $\mathbf{K}(X)$

Espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans **K** ; opérations.

Aucune connaissance sur la construction de $\mathbf{K}[X]$ n'est exigible des étudiants.

Degré d'un polynôme (on convient que le degré de 0 est $-\infty$), coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'un produit, d'une somme ; les polynômes de degré inférieur ou égal à p constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
L'anneau $\mathbf{K}[X]$ est intègre. Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles, degré d'une fraction rationnelle.

Notation $a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ ou, le cas échéant, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

Multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés. Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$, algorithme de la division euclidienne.

b) Fonctions polynomiales et rationnelles

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Équations algébriques. Zéros (ou racines) d'un polynôme ; ordre de multiplicité. Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales.

Reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X - a$; caractérisation des zéros de P.

§ Algorithme de Horner pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle ; ordre de multiplicité.

Définition du polynôme dérivé. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.

Les étudiants doivent connaître les relations

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X-a)^n}{n!} P^{(n)}(a),$$

$$P(a+X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

c) Polynômes scindés

Définition d'un polynôme scindé sur $\mathbf{K}$; relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines d'un polynôme n'est exigible des étudiants.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Description des polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et de $\mathbf{R}[X]$.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{C}$ et sur $\mathbf{R}$.

Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ de $X^n - 1$.

d) Divisibilité dans l'anneau $\mathbf{K}[X]$

§ Diviseurs communs à deux polynômes, polynômes premiers entre eux. PGCD de deux polynômes ; algorithme d'Euclide. PPCM de deux polynômes ; forme irréductible d'une fraction rationnelle.

La définition des idéaux de $\mathbf{K}[X]$ est hors programme.

Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.

Les étudiants doivent connaître l'algorithme donnant les coefficients de l'égalité de Bézout.

Polynômes irréductibles. Existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.

Pour la pratique de la décomposition en produit de facteurs irréductibles, le programme se limite au cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Aucune connaissance spécifique sur l'irréductibilité sur $\mathbf{Q}$ n'est exigible des étudiants.

e) Étude locale d'une fraction rationnelle

§ Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle R ; existence et unicité de la partie polaire de R relative à un pôle a. Lorsque a est un pôle simple de R, expressions de la partie polaire relative à ce pôle.

Les étudiants doivent savoir calculer la partie polaire en un pôle double. En revanche, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies pour des pôles d'ordre supérieur ou égal à 3. La division des polynômes suivant les puissances croissantes est hors programme.

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, toute fraction rationnelle R est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Existence et unicité de la décomposition de R en éléments simples. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur un corps autre que $\mathbf{C}$ n'est exigible des étudiants.