Interrogation 7 : Fonctions usuelles et convexité

Semaine du 15 au 20 novembre.

Programme :

1- Fonctions usuelles

Les propriétés des fonctions polynomiales et rationnelles et des fonctions exp, *(sur* $\mathbf{R}$*)*, ln, cos, sin *sont rappelées sans démonstration.*

a) Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances

Fonctions exponentielles réelles, fonctions logarithmes. Fonctions puissances. Croissances comparées de ces fonctions.	Les étudiants doivent savoir dériver une fonction de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
Fonctions hyperboliques ch, sh et th. Fonctions hyperboliques réciproques $\operatorname{Arg ch}$, $\operatorname{Arg sh}$ et $\operatorname{Arg th}$.	Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques des fonctions hyperboliques directes et réciproques. En ce qui concerne la trigonométrie hyperbolique, la seule formule exigible des étudiants est la relation $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ et son interprétation géométrique.

b) Fonctions circulaires

Fonctions circulaires cos, sin et tan. Fonctions circulaires réciproques $\operatorname{Arc sin}$, $\operatorname{Arc cos}$, $\operatorname{Arc tan}$.	Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques des fonctions circulaires directes et réciproques.

c) Fonction exponentielle complexe

Dérivation de $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ où $a \in \mathbf{C}$; dérivation de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$, où φ est à valeurs complexes.	La dérivée d'une fonction à valeurs complexes est définie par dérivation des parties réelle et imaginaire.

d) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, relation d'ordre.	Définition de $\|f\|$, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$.
Fonctions majorées, minorées. Fonctions bornées.	
Définition d'un extremum, d'un extremum local.	Notations $\max\limits_{x \in I} f(x)$ et $\max\limits_{I} f$.
Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction.	Notations $\sup\limits_{x \in I} f(x)$ et $\sup\limits_{I} f$.

Fonctions monotones, strictement monotones ; composition.

Sous-espace vectoriel des fonctions paires, des fonctions impaires.

Fonctions T-périodiques, opérations.

Définition des fonctions lipschitziennes.

2- Fonctions convexes

Définition, interprétation graphique (tout sous-arc est sous sa corde).
Croissance des pentes des sécantes dont on fixe une extrémité.

Inégalité de convexité : si $\lambda_j \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, alors

$$f\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(a_j).$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, f est convexe si et seulement si f' est croissante. La courbe est alors située au dessus de chacune de ses tangentes.

L'étude de la continuité et de la dérivabilité des fonctions convexes est hors programme.