Interrogation 6 : Fonctions, ensembles finis et combinatoire

Semaine du 8 au 13 novembre.

Programme :

1- Vocabulaire relatif aux ensembles et aux applications

Ensembles, appartenance, inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Opérations sur les parties : intersection, réunion, complémentaire. Produit de deux ensembles.

Application de E dans (vers) F ; graphe d'une application.

Ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F. Ensemble E^I des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble E indexées par un ensemble I.

Composée de deux applications, application identique. Restriction et prolongements d'une application.

Équations, applications injectives, surjectives, bijectives. Application réciproque d'une bijection. Composée de deux injections, de deux surjections, de deux bijections.

Images directe et réciproque d'une partie.

Définition d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition des éléments inversibles pour une loi associative admettant un élément neutre.

Relation d'ordre, ordre total, ordre partiel. Majorants, minorants, plus grand et plus petit élément.

2- Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrements

a) Nombres entiers naturels

Propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbf{N}$ des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.

Suites d'éléments d'un ensemble E (indexées par une partie de $\mathbf{N}$). Suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale.

Les étudiants doivent maîtriser le raisonnement par récurrence simple ou avec prédécesseurs.

Exemples d'utilisation des notations $a_1+a_2+\ldots+a_p+\ldots+a_n$, $a_1a_2\ldots a_p\ldots a_n$, $\sum_{1\leqslant p\leqslant n} a_p$, $\prod_{1\leqslant p\leqslant n} a_p$.

Symbole $n!$ (on convient que $0! = 1$).

Suites arithmétiques, suites géométriques. Notations na et a^n.

b) Ensembles finis

Définition : il existe n et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E ; cardinal (ou nombres d'éléments) d'un ensemble fini, notation $\operatorname{Card} E$. On convient que l'ensemble vide est fini et que $\operatorname{Card} \varnothing = 0$.

On admet que s'il existe une bijection de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, alors $p = n$.
Étant donnés deux ensembles finis E et F de même cardinal, et une application f de E dans F, f est bijective si et seulement si f est surjective ou injective.

Toute partie E' d'un ensemble fini E est finie et

$$\operatorname{Card} E' \leqslant \operatorname{Card} E,$$

avec égalité si et seulement si $E' = E$.

Une partie non vide P de N est finie si et seulement si elle est majorée. Si P est finie non vide, il existe une bijection strictement
croissante et une seule de l'intervalle $[\![1,n]\!]$ sur P, où $n = \operatorname{Card} P$.

c) § Opérations sur les ensembles finis, dénombrements

Si E et F sont des ensembles finis, $E \cup F$ l'est aussi ; cardinal d'une réunion finie de parties finies disjointes.
Si E et F sont des ensembles finis, $E \times F$ l'est aussi et

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \cdot \operatorname{Card} F.$$

Les étudiants doivent connaître la relation $\operatorname{Card}(A\cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

Cardinal de l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F ; cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Cardinal de l'ensemble des bijections (permutations) de E.

Cardinal $\binom{n}{p}$ de l'ensemble des parties ayant p éléments d'un ensemble E à n éléments. Combinaisons.
Relations

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n,$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \text{ (triangle de Pascal).}$$

Interprétation ensembliste de ces relations