Les calculatrices sont interdites.

Exercice

Soit $s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$. Montrer que la suite $(s_n)_{n \geqslant 2}$ diverge et en déterminer un équivalent. *(On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.)*

Problème 1 – La *series mirabili* d'Euler

L'objectif du problème est de déterminer un développement limité à l'ordre n de la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F : t \mapsto \int_0^1 x^{tx} dx$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ définie sur $]0, 1]$ se prolonge en une application φ continue sur $[0, 1]$. Étudier les variations de φ. Donner en particulier ses extrema globaux. En déduire que F est bien définie.
2. (a) On pose pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p x \, dx$. Justifier l'existence de cette intégrale et établir une formule liant $I_{n,p}$ et $I_{n,p-1}$.
   (b) En déduire $\int_0^1 x^n \ln^n x \, dx$.
3. Rappeler (sans preuve) la formule de Taylor-reste intégral pour la fonction exp à l'ordre n entre 0 et u.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de F.

Problème 2 – Hauteur d'un polynôme et mesure de Mahler

Dans tout le problème, d est un entier supérieur ou égal à 1. Si $f \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, avec $f = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on appelle hauteur de f la quantité

$$H(f) = \max_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i|$$

et mesure de Mahler de f la quantité

$$M(f) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |r_i|\}$$

où les r_i sont les racines complexes de f comptées avec multiplicités.

L'objectif du problème est de montrer que si f est de degré d, alors

$$\frac{M(f)}{\sqrt{d+1}} \leqslant H(f) \leqslant 2^{d-1} M(f).$$

Partie I – Démonstration de l'inégalité de droite

On fixe dans cette partie $f = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré d.

1. Montrer que pour tous $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $M(fg) = M(f)M(g)$.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, on a $\binom{d}{k} \leqslant 2^{d-1}$. (On pourra utiliser une récurrence sur d.)
3. Rappeler sans démonstration la formule donnant a_k/a_d en fonction des racines $r_1, \ldots, r_d$ (comptées avec multiplicités) de f.
4. Montrer que pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $|a_k| \leqslant \binom{d}{k} M(f)$.
5. Montrer que $H(f) \leqslant 2^{d-1} M(f)$.

Partie II – La formule de Jensen

6. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et $I(r) = \int_0^{2\pi} \ln(r^2 - 2r\cos t + 1) dt$.
   (a) Justifier l'existence de $I(r)$.
   (b) Montrer que $I(r) = 2 \int_0^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos t + 1) dt$.
   (c) Déterminer la décomposition en produit d'irréductibles de $X^{2n} - 1$ sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit $P_n(r) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)$. Montrer que

$$P_n(r) = (r^{2n} - 1)\frac{r+1}{r-1}.$$

(e) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|P_n(r)|$.

(f) En déduire que

$$I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 4\pi \ln|r| & \text{si } |r| > 1. \end{cases}$$

(On pourra reconnaître une somme de Riemann.)

7. Soit $t, r \in \mathbb{R}$. Exprimer $|e^{it} - r|$ en fonction de r et $\cos t$.
8. On suppose $P = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $|\alpha| \neq 1$. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P(e^{it})|dt$ ne dépend que de $|\alpha|$.
9. On suppose $P = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $|\alpha| \neq 1$. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P(e^{it})|dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha| < 1 \\ \ln|\alpha| & \text{si } |\alpha| > 1. \end{cases}$$
10. (Lemme de Jensen) Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ sans racines de module 1. Montrer que
$$M(f) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{it})|dt\right).$$
11. Montrer l'inégalité de Jensen : si $u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, alors
$$\exp\int_0^1 u(t)dt \leqslant \int_0^1 \exp(u(t))dt.$$
(Utiliser des sommes de Riemann et la convexité de exp.)

Partie III – Démonstration de l'inégalité de gauche

12. Soit $f = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^{d} a_k e^{2i\pi kt}\right|^2 dt$ en fonction des $|a_k|$.
13. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{C}[X]$ de degré d sans racine de module 1, on a
$$\frac{M(f)}{\sqrt{d+1}} \leqslant H(f).$$
14. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, on a
$$\frac{M(f)}{\sqrt{d+1}} \leqslant H(f).$$
(On pourra considérer une suite de polynômes $(f_n)_n$ sans racine de module 1 et convergente vers f.)